Математичне та комп’ютерне моделювання нестаціонарних температурних полів у багатошаровій плиті

Власій О.О. [1], Кусій М. І. [2], Стасюк М.Ф.[3]

[1]К.т.н., доцент кафедри інформатики, Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», вул. Шевченка 57, м. Івано-Франківськ, Україна, olesyav@ukr.net
[2] Доц., к.п.н., доцент кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, 79058, м. Львів, Україна
[3] Доц., к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики і механіки, Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, вул. Клепарівська, 35, 79058, м. Львів, Україна, marta_stasiuk@yahoo.com

Анотація – **Побудовано дискретно-неперервну математичну модель поширення температури у багатошаровій плиті за умови ідеального теплового контакту між шарами. Запропоновано та обґрунтовано алгоритм побудови розв’язку загальної першої крайової задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами на основі застосування концепції квазіпохідних та методу власних функцій. Розроблено програмний модуль прикладного забезпечення для чисельної реалізації представленого методу за умови довільної кількості шарів, який апробовано на модельних ситуаціях.**

Ключові слова: нестаціонарне температурне поле, дискретно-неперервна модель, багатошарова плита, квазіпохідна, метод власних функцій.

Mathematical and computer modelling unsteady temperature fields in a multilayer planar body

Vlasii O.[1], Kusii M.[2], Stasiuk M. [2]

[1] Phd., Department of Computer Science, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
57 Shevchenko str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine, olesyav@ukr.net
[2]Phd., Department of Applied Mathematics and Mechanics, Lviv State University of Vital Activity Safety,
35 Kleparivska Str., 79058, Lviv, Ukraine, marta_stasiuk@yahoo.com

Abstract – A problem of determination of unsteady temperature fields in a multilayer planar body with different physical characteristics of layers is studied. The discrete-continuous model described by initial-boundary value problem for heat equation with piecewise continuous coefficients is represented. The algorithm of obtaining an analytical solution of a corresponding problem with boundary conditions of the first kind is proposed for any amount of layers. The conception of quasi-derivatives and eigenfunction method are used. Based on the obtained analytical formulas the computer application is developed for the numerical analysis of appropriate temperature fields. The program is tested by the model situations, known in the literature.

Keywords: unsteady temperature field, discrete-continuous model, multilayer body, quasiderivative, eigenfunction method.

I. Вступ

У будівельній галузі широко застосовуються конструкції із багатошаровими елементами з різними фізичними характеристиками окремих шарів. Актуальним є питання дослідження температурних полів у таких середовищах, яке розглядається, наприклад, при проектуванні систем терморегуляції чи у екстремальних випадках виникнення пожеж [1]. Дослідження нестаціонарних температурних полів у таких конструкціях здебільшого мають частковий характер, оскільки стосуються конкретних вхідних даних (фізичних характеристик) [1]і потребують детальнішого вивчення у більш загальних випадках [2].

Наявні методи дослідження теплових процесів у багатошарових тілах зводяться до дослідження відповідних крайових задач на кожному з шарів окремо і послідовному спряженні розв’язків на основі врахування умов теплових контактів між шарами. Чисельна реалізація таких методів значно ускладнюється за умови наявності багатьох шарів. Тому врахування кусково-змінних характеристик шарів приводить до проблеми створення адекватних математичних моделей та розробки методів їх дослідження. В даній статті запропоновано дискретно-неперервний підхід до побудови математичної моделі нестаціонарного процесу поширення температури у багатошаровій плиті, який дає змогу описати задачу для довільної кількості шарів єдиним диференціальним рівнянням та заданням одних початково-крайових умов. Запропоновано алгоритм побудови розв'язку відповідної початково-крайової задачі, чисельна реалізація якого не ускладнюється при збільшенні кількості шарів.

II. Постановка задачі та математична модель

Розглянемо багатошарову плиту, яка складається з n паралельних плоских шарів із товщинами $d_1, d_2, ..., d_n$. Спрямуємо координатну вісь Ox в напрямку, перпендикулярному шарам плити, із початком відліку на лівій межі плити. Позначимо $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ – координати меж шарів, тобто $x_0 = 0$ – ліва границя плити, x_n – її права границя. Тоді товщина i-го шару – $d_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,...,n$.

Введемо в розгляд так звану характеристичну функцію шару

$$\Theta_i = \Theta_i(x) = \begin{cases} 1, x \in [x_i; x_{i+1}) \\ 0, x \notin [x_i; x_{i+1}) \end{cases}.$$

Вважатимемо, що кожний i-тий шар виготовлений з ізотропного матеріалу та має наступні характеристики: λ_i – коефіцієнт тепло-провідності, [λ_i]=Вт/(м·К), c_i – ізобарна питома теплоємність, [c_i]=Дж/кг·К, ρ_i – густина i-го шару, [ρ_i]=кг/м³.

Позначимо $r_i = c_i \rho_i$ і на всьому проміжку $[x_0; x_n]$ введемо в розгляд функції

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \Theta_i(x), \; r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \Theta_i(x).$$

Нехай у початковий момент часу $\tau = 0$ температура у плиті розподілена за законом

$$t(x,0) = \varphi(x), \tag{1}$$

а на зовнішніх поверхнях плити зміна температури відбувається за наступними законами

$$\begin{cases} t(x_0, \tau) = \psi_0(\tau) \\ t(x_n, \tau) = \psi_n(\tau) \end{cases} \tag{2}$$

Для визначення нестаціонарного температурного поля запишемо рівняння теплопровідності із кусково-неперервними коефіцієнтами

$$r(x) \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x) \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial x} \right) \tag{3}$$

до якого приєднаємо умови (1)-(2).

Таким чином, процес поширення тепла у багатошаровій плиті описується дискретно-неперервною математичною моделлю (3)-(1), (2).

III. Алгоритм побудови температурного поля

Розв'язок задачі (3) – (2), (1) шукаємо методом редукції у вигляді суми двох спеціально підібраних функцій $t(x,\tau) = t_0(x,\tau) + t_p(x,\tau)$.

Функція $t_0(x,\tau)$ є розв'язком крайової задачі

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t_0(x,\tau)}{\partial x} \right) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} t_0(x_0, \tau) = \psi_0(\tau) \\ t_0(x_n, \tau) = \psi_n(\tau) \end{cases}. \tag{5}$$

Відповідна задача для визначення функції $t_p(x,\tau)$:

$$r \frac{\partial t_p(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t_p(x,\tau)}{\partial x} \right) - r \frac{\partial t_0(x,\tau)}{\partial \tau} \tag{6}$$

$$\begin{cases} t_p(x_0, \tau) = 0 \\ t_p(x_n, \tau) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$t_p(x,0) = \varphi(x) - t_0(x,0) \tag{8}$$

Для побудови аналітичного представлення функції $t_0(x,\tau)$ застосовується концепція квазі-похідних [3], а для розв'язання задачі (6)-(8) – метод власних функцій [4].

На основі отриманих аналітичних формул для розв'язку задачі (3) - (1), (2) розроблено прикладну програму для чисельної реалізації запропонованого методу та побудови відповідних температурних полів. Програму протестовано на модельних ситуаціях, відомих в літературі [1].

IV. Висновки

На основі дискретно-неперервного підходу запропоновано математичну модель нестаціо-нарного поширення температури у багатошаровій плиті з різними фізичними характеристиками шарів. Дана модель описується мішаною задачею для рівняння теплопровідності із кусково-неперервними коефіцієнтами. Запропоновано алгоритм побудови аналітичного розв'язку відповідної задачі із застосуванням концепції квазіпохідних та методу власних функцій. Здійснено комп'ютерну реалі-зацію наведеного алгоритму для чисельного дослідження температурних полів. У перспективі досліджень – розробка алгоритму побудови температурних полів за інших крайових умов на поверхнях плити.

[1] Величко Л. Д. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л. Д. Величко, Р. Я. Лозинський, М. М. Семерак. – Львів: Сполом, 2011. – 502 с.

[2] Процюк Б. В. Дослідження нестаціонарного температурного поля в багатошаровій плоскій конструкції / Б. В. Процюк [та ін.] // Пожежна безпека. – 2012. – № 20. – С. 111-117.

[3] Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій [та ін.]. – Дрогобич. Коло, 2011. – 297 с.

[4] Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. Наука, 1977. – 735 с.