

Невизначений інтеграл .

План

1. Метод інтегрування частинами.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

Метод інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

– це *формула інтегрування частинами*.

Наведемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати саме методом інтегрування частинами. Це наступні інтеграли:

1. $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, де $P(x)$ – многочлен, а k – дійсне число. У таких інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;

2. $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, де $P(x)$ – многочлен, а k – дійсне число. У таких інтегралах слід взяти за $dv = P(x)dx$;

3. $\int e^{nx} \sin kx dx$, $\int e^{nx} \cos kx dx$, де n, k - дійсні числа. Тут після двократного застосування формули (6.4) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Розв'язуючи його, знаходимо заданий інтеграл.

Приклади:

1. $\int (3x - 1) e^x dx$.

Г Покладемо $u = 3x - 1$, $dv = e^x dx$. Тоді $du = (3x - 1)' dx = 3dx$,
 $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$. Застосовуючи формулу , дістанемо

$$\begin{aligned}\int (3x-1)e^x dx &= (3x-1)e^x - \int e^x 3 dx = (3x-1)e^x - 3 \int e^x dx = \\ &= (3x-1)e^x - 3e^x + C = e^x(3x-4) + C. \quad \square\end{aligned}$$

2. $\int x e^{2x} dx$.

Покладемо $u = x$, $dv = e^{2x} dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$. За формулою знаходимо

$$\begin{aligned}\int x e^{2x} dx &= x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C. \quad \square\end{aligned}$$

3. $\int x^2 \cos 3x dx$.

Для обчислення даного інтеграла формулу (2) доведеться застосовувати двічі. Покладемо $u = x^2$, $dv = \cos 3x dx$. Тоді $du = (x^2)' dx = 2x dx$, $v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x$. Застосуємо формулу :

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos 3x dx &= x^2 \frac{1}{3} \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 2x dx = \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \int x \sin 3x dx.\end{aligned}$$

Обчислимо інтеграл $\int x \sin 3x dx$. Покладемо $u = x$, $dv = \sin 3x dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x$. Отже,

$$\begin{aligned}\int x \sin 3x dx &= x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + C = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.\end{aligned}$$

Підставляючи знайдений вираз у формулу замість $\int x \sin 3x dx$, остаточно знаходимо

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \right) + C =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C = \\
&= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27} \right) \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

Завдання на самопідготовку

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int x \sin 5x \, dx$.
2. $\int (3-4x) \cos 2x \, dx$.
3. $\int x e^{-x} \, dx$.
4. $\int x^2 e^x \, dx$.
5. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, dx$.
6. $\int x \ln x \, dx$.
7. $\int \ln(x^2 + 4) \, dx$.
8. $\int \arccos x \, dx$.

Відповіді:

1. $\frac{\sin 5x}{25} - \frac{x}{5} \cos 5x + C$.
2. $\frac{3-4x}{2} \sin 2x - \cos 2x + C$.
3. $-e^{-x}(x+1) + C$.
4. $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$.
5. $-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C$.
6. $\frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C$.
7. $x \ln(x^2 + 4) - 2x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.
8. $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

