

Інтегрування дробово-раціональних функцій

План

1. Дробово-раціональні функції.
2. Розклад раціонального дробу на елементарні дробби.
3. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

Означення. Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дробби чотирьох видів:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{A}{x-a}, & \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, n=1, 2, \dots \\ \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, & \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, n=1, 2, \dots, \end{array}$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $D < 0$.

Інтеграли вигляду III можна знаходити методом заміни.

Приклад:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-4x+3} dx &= \int \frac{x+1}{(x-2)^2-1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t+3}{t^2-1} dt = \\ &= \int \frac{t}{t^2-1} dt + 3 \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-1)}{t^2-1} + 3 \int \frac{dt}{t^2-1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2-1) + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+3) + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C; \end{aligned}$$

Приклад:

$$I = \int \frac{6x^2 + 22x - 1}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

┐ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{6x^2+22x-1}{6x^2+24x+30} \\ -2x-31 \end{array} \right| \frac{x^2+4x+5}{6} : \frac{6x^2+22x-1}{x^2+4x+5} = 6 - \frac{2x+31}{x^2+4x+5}.$$

Тоді маємо

$$I = \int \left(6 - \frac{2x+31}{x^2+4x+5} \right) dx = 6x - \int \frac{2x+31}{x^2+4x+5} dx.$$

Оскільки $(x^2+4x+5)' = 2x+4$, то дістанемо

$$I = 6x - \int \frac{(2x+4)+27}{x^2+4x+5} dx = 6x - \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+5} - 27 \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = 6x - I_1 - 27 I_2.$$

Перший інтеграл обчислимо методом заміни змінної, а для другого інтеграла використаємо прийом виділення повного квадрата:

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 4x + 5 \\ dt = (2x + 4) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 4x + 5| + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Остаточнo маємо

$$I = 6x - \ln(x^2 + 4x + 5) - 27 \operatorname{arctg}(x + 2) + C.$$

Вправи:

1. Вказати тип раціональних дробів (правильний чи неправильний):

$$\text{а). } \frac{2x^3 - 3x}{5x + 2}; \quad \text{б). } \frac{x^2 - 3}{(5x + 2)(x^2 - 4)};$$

$$\text{в). } \frac{3 - 4x + 6x^3}{10x^4}; \quad \text{г). } \frac{2x^5 - 4x - 1}{6x^2 + 7x^5}.$$

2. Розкласти раціональні дроби на елементарні дроби та знайти невідомі коефіцієнти:

$$\text{а). } \frac{2x^3 - 3x}{5x + 2}; \quad \text{б). } \frac{x^2 - 3}{(5x + 2)(x^2 - 4)};$$

$$\text{в). } \frac{3 - 4x + 6x^3}{10x^4}; \quad \text{г). } \frac{2x^3 - 4x - 1}{6x^2 + 7x^3}.$$

3. Обчислити невизначені інтеграли, що містять квадратний тричлен:

$$\text{а). } \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}; \quad \text{б). } \int \frac{dx}{x^2 - 2x};$$

$$\text{в). } \int \frac{x - 1}{x^2 + 3x - 4} dx; \quad \text{г). } \int \frac{2x - 6}{x^2 - 9x + 20} dx;$$

4. Обчислити інтеграли від раціональних функцій

$$\text{а). } \int \frac{dx}{(x^2 + 2x - 3)x}; \quad \text{б). } \int \frac{dx}{x^3 - 4x};$$

Завдання на самопідготовку

$$\text{а). } \int \frac{x - 3}{\sqrt{23x - 6 - 7x^2}} dx; \quad \text{б). } \int \frac{dx}{x^2 + x + 1};$$

$$\text{в). } \int \frac{3x - 4}{\sqrt{6x^2 + 13x - 5}} dx; \quad \text{г). } \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 2 \cos x - 3};$$

$$\text{д). } \int \frac{x - 1}{(x - 3)(x - 4)(x + 1)} dx; \quad \text{е). } \int \frac{2x - 6}{(x^2 - 9)x^2} dx;$$