

Лекція 7

Інтегрування дробово-раціональних функцій

План

1. Дробово-раціональні функції.
2. Розклад раціонального дробу на елементарні дроби.
3. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Дробово-раціональні функції

Означення. Многочленом n -го степеня називається функція вигляду:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad (1)$$

де n – це *ступінь многочлена* (1) ($n \in \mathbb{N}$), $a_0, a_1, \dots, a_n$ – *коефіцієнти многочлена*, x – *незалежна змінна*.

Надалі розглядатимемо многочлени (1) з дійсними коефіцієнтами.

Означення. Коренем многочлена (1) називається таке число x_1 , для якого виконується $P_n(x_1) = 0$.

Теорема 1 (Безу). Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на різницю $x - a$ дорівнює $P_n(a)$.

Якщо x_1 – корінь многочлена, тобто $P_n(x_1) = 0$, то згідно з теоремою Безу

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x - x_1). \quad (2)$$

Теорема 2 (основна теорема алгебри). Многочлен n -го степеня має n коренів.

Доведення теорем не наводимо.

З *теореми Безу* та *основної теореми* алгебри випливає наступна теорема:

Теорема 3. Якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені многочлена n -го степеня $P_n(x)$, то його можна подати у вигляді:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (3)$$

де a_0 – коефіцієнт многочлена $P_n(x)$ при x^n .

Формула (3) – це *многочлен* (1), *розкладений на множники*.

Означення. Множники $x - x_i$ (x_i – *корені многочлена* (1)) $i=1, 2, \dots, n$ у формулі (3) називаються *лінійними множниками*.

Приклад. Розкласти многочлен $2x^3 + 6x^2 - 2x - 6$ на лінійні множники.

□ Враховуючи, що коренями многочлена є $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, за теоремою 3 маємо:

$$2x^3 + 6x^2 - 2x - 6 = 2(x-1)(x+1)(x+3). \blacksquare$$

Якщо деякі з лінійних множників однакові, то їх можна об'єднати і формула (3) набуде вигляду:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-x_r)^{k_r} \quad (4)$$

де r - кількість різних коренів многочлена (1) і очевидно, що $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, оскільки степінь многочлена $P_n(x)$ дорівнює n . Корінь x_1 називається *коренем кратності k_1* або *k_1 – кратним коренем*, x_2 – *коренем кратності k_2* і т. д. *Корінь кратності один* називається *простим коренем*. У попередньому прикладі всі корені є простими. Наведемо приклад з кратними коренями.

Приклад. Розкласти многочлен $x^3 - 3x + 2$ на лінійні множники.

□ Так як корені многочлена є $x_1 = -2$, $x_{2,3} = 1$, то за теоремою 3 розклад даного многочлена такий:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2),$$

де $x_1 = 1$ – корінь кратності 2, $x_2 = -2$ – простий корінь. ■

Означення. Відношення двох многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ називається *дробово-раціональною функцією* або *раціональним дробом*, тобто

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $Q_n(x) \neq 0$.

Зауважимо, що раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника ($m < n$). Якщо ж $m \geq n$, тоді раціональний дріб – *неправильний*.

Приклад. Вказати тип раціональних дробів:

$$\text{а) } \frac{3x^3 - 4x}{5x + 5}, \quad \text{б) } \frac{3x - 9}{x}, \quad \text{в) } \frac{4x}{6x^3 + 5x - 3}.$$

□ Визначивши степені чисельників та знаменників одержуємо, що а) та б) – неправильні раціональні дроби, в) – правильний раціональний дріб. ■

2. Розклад раціонального дробу на елементарні дроби

При вивченні числових дробів ми могли переходити від неправильного дробу до правильного, виділяючи цілу частину. Аналогічно можна діяти у випадку раціонального дробу. Якщо дріб неправильний, то виконавши ділення многочлена на многочлен з остачею, одержимо

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x) + \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}, \quad (4)$$

де $W_k(x)$ і $R_p(x)$ – многочлени, причому $p < n$, тобто дріб

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$$

правильний.

Приклад. Виділити цілу частину неправильного дробу

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1}.$$

□ Виконавши ділення многочлена на многочлен, одержимо:

$$\frac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}. \blacksquare$$

Дамо означення *елементарного раціонального дробу*.

Означення. Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дробу чотирьох видів:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{A}{x-a}, & \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, n=1, 2, \dots \\ \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, & \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, n=1, 2, \dots, \end{array}$$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $D < 0$.

Розкладемо правильний дріб на елементарні, що дасть нам змогу істотно спростити інтегрування раціональних дробів.

Теорема. Нехай знаменник правильного раціонального дробу

$$\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$$

розкладено на множники за формулою :

$$Q_n(x) = a_0 (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta \cdot (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+lx+s)^\nu.$$

Тоді цей дріб можна подати у вигляді (5):

$$\begin{aligned} \frac{R_p(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \\ & + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \\ & + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^3} + \dots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+px+q)^\mu} + \dots + \frac{L_1x+F_1}{x^2+lx+s} + \\ & + \frac{L_2x+F_2}{(x^2+lx+s)^2} + \dots + \frac{L_\nu x+F_\nu}{(x^2+lx+s)^\nu}, \end{aligned}$$

числа. Формула (5) називається *розкладом правильного раціонального дробу на елементарні дробу*.

Приклад 1. Виразити раціональний дріб $\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$

через елементарні дробу.

□ Даний раціональний дріб є правильним (ступінь чисельника дорівнює 2, а знаменника – 3), тому, згідно з формулою розкладу раціонального дробу на елементарні дробу, маємо:

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

де A, B, C – невідомі числа. ■

Для знаходження невідомих чисел A, B, C у даному прикладі та $A_1, A_2, \dots, L_v, F_v$ у формулі (5) можна скористатися двома методами: *методом невизначених коефіцієнтів* та *методом окремих значень аргумента*.

Метод невизначених коефіцієнтів

Для застосування *методу невизначених коефіцієнтів* помножимо формулу (5) (обидві її частини) на знаменник $Q_n(x)$ та одержимо два тотожно рівні многочлени: $R_p(x)$ та многочлен з невідомими коефіцієнтами $A_1, A_2, \dots, L_v, F_v$. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x (оскільки многочлени називаються тотожно рівними, якщо їхні коефіцієнти при однакових степенях рівні), одержимо систему рівнянь з невідомими $A_1, A_2, \dots, L_v, F_v$. Розв'язавши систему знайдемо невідомі коефіцієнти.

Приклад. Визначити невідомі коефіцієнти A, B, C у попередньому прикладі.

□ Розклад шукаємо у вигляді:

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника праву частину та прирівняємо чисельники лівої та правої частин:

$$\begin{aligned} 2x^2+1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x; \\ 2x^2+1 &= Ax^2+A+Bx^2+Cx; \\ 2x^2+1 &= x^2(A+B)+Cx+A. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях та одержимо:

$$\begin{aligned} x^2: \quad & A+B=2, \\ x^1: \quad & C=0, \\ x^0: \quad & A=1, \end{aligned}$$

Звідси, розв'язавши цю систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, одержуємо:

$$A=1, \quad C=0, \quad B=1.$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти у розклад:

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}. \quad \blacksquare$$

Метод окремих значень аргумента.

Метод окремих значень аргумента дає можливість спростити знаходження невідомих коефіцієнтів у випадку простих дійсних коренів. Розглянемо цей метод на прикладі.

Приклад. Вирозити дріб

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x-2)}$$

через елементарні:

□ Оскільки знаменник має прості корені, то дріб запишемо у вигляді

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Аналогічно попередньому методу одержуємо:

$$x-1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1),$$

Коренями знаменника є такі значення:

$$x = 0, x = -1, x = 2.$$

Підставляючи їх у вираз, знаходимо невідомі коефіцієнти, тобто

$$\text{якщо } x = 0, \text{ то } -1 = 1 \cdot (-2)A, \text{ звідси } A = \frac{1}{2},$$

$$\text{якщо } x = -1, \text{ то } -2 = 3B, \text{ звідси } B = -\frac{2}{3},$$

$$\text{якщо } x = 2, \text{ то } 1 = 6C, \text{ звідси } C = \frac{1}{6}.$$

Отже, розклад дробу буде мати такий вигляд:

$$\frac{x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} + \frac{-2}{3(x+1)} + \frac{1}{6(x-2)}. \quad \blacksquare$$

Іноді ці два методи можна комбінувати. Наведемо відповідний приклад.

Приклад. Виразити через елементарні дробі раціональний дріб

$$\frac{2}{x^2(x+1)}.$$

□ Згідно з теоремою розкладу, маємо

$$\frac{2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Домножимо обидві частини на знаменник $x^2(x+1)$ та одержимо:

$$2 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2,$$

Використаємо спочатку метод окремих значень аргумента:

$$\text{при } x = 0, B = \frac{1}{2}, \text{ а при } x = -1, C = 2.$$

Для відшукування коефіцієнта A використаємо метод невизначених коефіцієнтів. Для цього прирівняємо коефіцієнти при x^2 та одержимо, що $A = -2$. Остаточно маємо

$$\frac{2}{x^2(x+1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x+1}. \quad \blacksquare$$

3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

У багатьох задачах доводиться інтегрувати дробово-раціональні функції, які складають важливий клас функцій. Розглянемо методи *інтегрування дробово-раціональних функцій*.

Нехай треба знайти інтеграл від дробово-раціональної функції: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$

Згідно із формулою (4), цей інтеграл подамо у вигляді суми інтеграла від многочлена та правильного раціонального дробу, тобто:

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int W_k(x) dx + \int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)} dx.$$

Перший доданок – це інтеграл від многочленна, що знаходиться методом безпосереднього інтегрування, а другий доданок – це інтеграл від правильного раціонального дробу. Відомо, що правильний раціональний дріб можна розкласти на елементарні дробу, як у формулі (5). Розглянемо класи правильних раціональних дробів та методи їх інтегрування. Інтеграли від таких дробів завжди можна знайти.

$$1. \quad \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$2. \quad \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$3. \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx.$$

□ Ввівши заміну змінних, цей інтеграл шукатимемо таким чином:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \left| x = t - \frac{p}{2} \right| = \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{(t - \frac{p}{2})^2 + p(t - \frac{p}{2}) + q} dt = \\ &= \int \frac{Mt + N - M \frac{p}{2}}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt = M \int \frac{t dt}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} + (N - \frac{Mp}{2}) \times \\ &\times \int \frac{dt}{t^2 + (q - \frac{p^2}{4})} = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + q - \frac{p^2}{4})}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dt}{t^2 + (q - \frac{p^2}{4})} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + q - \frac{p^2}{4}) + C + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dt}{t^2 + (q - \frac{p^2}{4})}. \end{aligned}$$

Останній інтеграл – табличний, причому $q - \frac{p^2}{4} > 0$. ■

$$4. \quad I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx, \text{ де } p^2 - 4q < 0.$$

□ Даний інтеграл шукатимемо методом підстановки за допомогою заміни $x = t - \frac{p}{2}$, що дасть нам змогу записати його у вигляді суми двох інтегралів.

$$I_n = M \int \frac{tdt}{(t^2 + d^2)^n} + (N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dt}{(t^2 + d^2)^n}, d^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Перший інтеграл обчислюємо безпосередньо, внівши змінну t під диференціал. Розглянемо другий інтеграл. Він обчислюється за так званою *рекурентною формулою*. Тоді

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + d^2)^n} = \frac{1}{d^2} \int \frac{d^2 dt}{(t^2 + d^2)^n} = \frac{1}{d^2} \int \frac{d^2 + t^2 - t^2}{(t^2 + d^2)^n} dt = \\ &= \frac{1}{d^2} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + d^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + d^2)^n} \right) = \\ &= \frac{1}{d^2} I_{n-1} - \frac{1}{d^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + d^2)^n} \end{aligned}$$

До останнього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами, вибравши $u = t$, $dv = \frac{tdt}{(t^2 + d^2)^n}$, в результаті чого отримаємо інтеграл I_n , який можна знайти через інтеграл I_{n-1} для будь-якого натурального числа $n > 1$. ■

Отже, інтегрування будь-якої дробово-раціональної функції зводиться до інтегрування многочлена та скінченного числа елементарних дробів, інтеграли від яких виражаються через дробово-раціональні функції, логарифми і арктангенси. Покажемо це на прикладах.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} dx \\ &\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} dx = \left| \begin{matrix} x = t + 2 \\ dx = dt \\ t = x - 2 \end{matrix} \right| = \int \frac{t+2+1}{(t+2)^2 - 4t - 8 + 3} dt = \\ &= \int \frac{(t+3)dt}{t^2 + 4t + 4 - 4t - 5} = \int \frac{(t+3)dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 - 1)}{t^2 - 1} + 3 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2 - 1) + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 3) + \\ &\quad + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{2}{x^2(x+1)} dx$$

□ Даний інтеграл – це інтеграл від правильного дробу, підінтегральний вираз який було розкладано на елементарні дробы методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{2}{x^2(x+1)} = -\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{2}{x+1}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2(x+1)} dx &= -2 \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -2 \ln|x| - \frac{1}{2x} + 2 \ln|x+1| + C. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

? Контрольні запитання

1. Яка функція називається дробово-раціональною?
2. Що таке корінь многочлена?
3. Визначити лінійні та квадратні множники многочлена.
4. Які корені називаються кратними?
5. Які дробі називаються елементарними?
6. Як розкласти дріб на елементарні дробі?
7. Як інтегруються елементарні дробі?
8. За допомогою якої заміни зручно інтегрувати квадратні тричлени?
9. Що таке рекурентна формула та як вона застосовується при знаходженні невизначених інтегралів?
10. В чому полягає суть методу невизначених коефіцієнтів.
11. Як "діє" метод окремих аргументів?
12. Коли зручно використовувати комбінований метод знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу раціонального дробу?