

Лекція 8

Інтегрування тригонометричних, ірраціональних та деяких інших функцій.

План

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування ірраціональних функцій.
3. Інтеграли, які "не беруться".

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Інтегрування тригонометричних функцій

Під час інтегрування тригонометричних функцій не завжди можна одержати вираз у вигляді деякої комбінації елементарних функцій, інтеграли від яких легко обчислюються. Однак, можна вказати деякі тригонометричні функції, інтеграли від яких "беруться" достатньо легко. До цього підкласу належать функції, які є раціональними від функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. Деякі тригонометричні вирази після тих чи інших тригонометричних перетворень інтегруються за допомогою елементарних прийомів. Розглянемо їх.

Використовуючи формули пониження степеня можна знаходити такі інтеграли:

$$1. \int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2ax) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C .$$

$$2. \int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2ax) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C .$$

3. Формули пониження степеня можна застосувати для спрощення інтегралів виду:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (8.1)$$

де m, n – цілі додатні парні числа.

Якщо у (8.1) m – ціле додатне непарне число, то інтеграл обчислюємо

підстановкою $\sin x = t$, якщо n – ціле додатне непарне число, то підстановкою $\cos x = t$, якщо m, n – цілі парні числа, та хоч одне з них від'ємне або m, n – цілі непарні, то інтеграл (8.1) зводиться до інтегралу від раціональної функції заміною $\operatorname{tg} x = t$.

4. Інтеграли, що містять добутки тригонометричних функцій, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою формул, які замінюють добутки сумами, тобто

$$\begin{aligned}\int \sin ax \cos bx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x + C.\end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + C.$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + C.$$

5. Використовуючи деякі тригонометричні перетворення можна знайти такі інтеграли:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

$$\int e^{\cos x} \sin x \, dx = -\int e^{\cos x} d(\cos x) = -e^{\cos x} + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

$$\square \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C. \blacksquare$$

Приклад. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\square \text{ а) } \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \blacksquare$$

Розглянемо інші види функцій, інтеграли від яких безпосередньо знайти не завжди вдається. Наведемо деякі з них.

6. Функції виду $R(\sin x, \cos x)$. Для того, щоб знайти інтеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$, використовують підстановку, яка дозволяє звести вихідний інтеграл до інтегралу від раціональної функції. Суть цієї підстановки полягає в заміні змінної:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

тоді тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$ завдяки цій підстановці матимуть вигляд:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = d(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Така заміна змінної називається *універсальною підстановкою*, оскільки дає змогу завжди позбутися тригонометричних функцій. Отже, будь-який інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$ завжди можна знайти.

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

$$\begin{aligned} \square \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \left. \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4} \int t dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{t^2}{8} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Однак, ця підстановка може призвести до складних випадків, тобто до раціональних функцій, інтеграли від яких обчислювати надто складно. Тому при можливості краще користуватися іншими підстановками:

7. Функції вигляду:

а) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ інтегруємо за допомогою підстановки $t = \cos x$.

б) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ інтегруємо за допомогою підстановки $t = \sin x$.

в) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ інтегруємо за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} x$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

□ Оскільки

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-\sin x}{-\sin x - \cos x} = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = R(\sin x, \cos x),$$

тому застосовуємо підстановку $t = \operatorname{tg} x$. Тоді $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

$$dx = \cos^2 x dt = \frac{dt}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{dt}{1 + t^2}, \quad \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} = \frac{t}{t + 1}.$$

Отже, одержуємо

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} dt,$$

а це вже інтеграл від правильного раціонального дробу, який можна знайти за допомогою методів, розглянутих у попередніх розділах. Пропонується самостійно закінчити цей приклад. ■

2. Інтегрування ірраціональних функцій

Нехай $R(u, x, \dots, k)$ – *раціональна функція* від змінних $u, x, \dots, k$, тобто така, в якій над зазначеними змінними та дійсними числами виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення, ділення. Якщо над функцією виконуються операція добування коренів, то така функція називається *ірраціональною*.

Зауважимо, що інтеграли від ірраціональних функцій не завжди виражаються через елементарні функції. Розглянемо деякі класи функцій, інтеграли від яких за допомогою підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Наприклад, раціональною функцією від змінних x та z є функція $T(x, z) = 4x^4 - z + 5 + \frac{x}{z}$, а ірраціональною – функція однієї змінної $I(x) = \sqrt[3]{x}$.

Розглянемо класи ірраціональних функцій, інтеграли від яких зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

1. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції підстановкою $x = t^\lambda$, де λ – спільний знаменник $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$, $dx = \lambda \cdot t^{\lambda-1} dt$.

Після такої заміни одержуємо:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx = \int R\left(t^\lambda, t^{\frac{m \cdot \lambda}{n}}, \dots, t^{\frac{r \cdot \lambda}{s}}\right) \lambda \cdot t^{\lambda-1} dt = \int R^*(t) dt$$

$R^*(t)$ – раціональна функція.

Приклад. Знайти інтеграл від ірраціональної функції: $\int \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt[4]{x+1}}$.

□ Застосуємо підстановку $x = t^4$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x+1}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ t = \sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^2 \cdot t^3 dt}{t+1} = \int \frac{4t^5 dt}{t+1} = 4 \left(\int (t^4 - t^3 + t^2 - t + 1) dt - \int \frac{d(t+1)}{t+1} \right) = \\ &= 4 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C \right) = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \sqrt{x} - x + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4 \ln|\sqrt[4]{x} + 1| + C \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. Інтеграл вигляду:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\lambda$, де λ – спільний знаменник $\frac{m}{n}; \dots; \frac{r}{s}$.

Якщо

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^\lambda,$$

тоді

$$ax+b = t^\lambda (cx+d),$$

$$ax+b = t^\lambda cx + t^\lambda d,$$

$$x(a - t^\lambda c) = t^\lambda d - b,$$

$$x = \frac{t^\lambda d - b}{a - t^\lambda c},$$

$$dx = \frac{\lambda \cdot t^{\lambda-1} (ad - cb)}{(a - ct^\lambda)^2} dt.$$

При такій заміні x та dx виражаються через раціональні функції

аргумента t . Оскільки, дріб $\frac{ax+b}{cx+d}$ виразиться через цілий степінь t , то підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію змінної t .

Приклад. Обчислити інтеграл: $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

□

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} x+4=t^2 \\ dx=2tdt \\ t=\sqrt{x+4} \end{array} \right| = \int \frac{2t^2 dt}{t^2-4} = 2 \int \frac{t^2-4+4}{t^2-4} dt = 2t + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + \frac{8}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \quad \blacksquare$$

Підстановки Ейлера

Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \cdot dx$$

можна звести до інтегралів від раціональної функції за допомогою *підстановок Ейлера*. Ці підстановки здійснюються для таких випадків і мають вигляд:

1. Якщо $a > 0$, тоді робимо заміну:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t;$$

2. Якщо $c > 0$, тоді заміна має вигляд

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c};$$

3. Якщо $b^2 - 4ac > 0$, тоді підстановка є такою

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t,$$

де α – корінь тричлена $ax^2 + bx + c$, причому $\alpha < \beta$, де β – другий корінь тричлена.

Ці три випадки охоплюють всі можливості квадратного тричлена: якщо $D > 0$, то корені дійсні і різні, тоді підходить випадок 3, коли $D = 0$, тоді утворюється повний квадрат і ірраціональність зникає, а коли $D < 0$, то можна використати випадки 1 або 2. Випадок, коли $a < 0$, $c < 0$ одночасно, відпадає через комплексні корені квадратного тричлена, а якщо $a > 0$ чи $c > 0$, то підходять випадки 1 або 2.

Наведемо приклади використання підстановок Ейлера.

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

□ Оскільки корені квадратного тричлена $\alpha = -1, \beta = 1$, причому $\alpha < \beta$, то зробимо заміну як у випадку 3 та деякі перетворення для здійснення заміни

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1} &= (x+1) \cdot t, \\ x^2-1 &= (x+1)^2 t^2, \\ x-1 &= (x+1) \cdot t^2, \\ x(1-t^2) &= 1+t^2.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}x &= \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \sqrt{x^2-1} = \left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1-t^2} \right) t = \frac{2t}{1-t^2}, \\ dx &= \frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2t-2t^3+2t+2t^3}{(1-t^2)^2} dt = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt.\end{aligned}$$

Після заміни змінної отримуємо такий інтеграл:

$$\begin{aligned}4 \int \frac{(1-t^2)tdt}{(1-t^2)^2(1+t^2-2t)} &= 4 \int \frac{tdt}{(1-t^2)(1-t)^2} = \\ &= -4 \int \frac{tdt}{(t^2-1)(t-1)^2} = -4 \int \frac{tdt}{(t-1)(t+1)(t-1)^2} = \\ &= -4 \int \frac{(t+1-1)dt}{(t-1)(t+1)(t-1)^2} = -4 \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^3} + 4 \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)^3} = \\ &= \frac{2}{(t-1)^2} + 4 \int \frac{dt}{(t-1)^3(t+1)}.\end{aligned}$$

Таким чином отримано інтеграл від раціональної функції, який можна знайти за відповідними правилами. ■

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}.$$

□ Аналогічно попередньому прикладу, здійснивши заміну, маємо:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x-x^2} &= xt-1, \\ 1-x-x^2 &= x^2t^2-2xt+1, \\ -x-x^2 &= x^2t^2-2xt, \\ 1+x &= 2t-xt^2, \\ x(1+t^2) &= 2t-1, \\ x &= \frac{2t-1}{1+t^2}, \\ dx &= \frac{2(1+t^2)-2t(2t-1)}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2+2t^2-4t^2+2t}{(1+t^2)^2} dt = \\ &= \frac{-2t^2+2t+2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{2(-t^2+t+1)}{(1+t^2)^2} dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}} &= 2 \int \frac{(-t^2+t+1)(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2 \left[\left(\frac{2t-1}{1+t^2} \right) t - 1 \right] (2t-1+1+t^2)} = \\
&= 2 \int \frac{(-t^2+t+1)dt}{(2t+t^2)(2t^2-t-1-t^2)} = 2 \int \frac{(-t^2+t+1)dt}{t(2+t)(t^2-1-t)} = \\
&= -2 \int \frac{dt}{(t+2)t} = - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+2} = -\ln|t| + \ln|t+2| + C. \blacksquare
\end{aligned}$$

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}.$$

□ Здійснимо заміну

$$\sqrt{x^2-x+3} = x+t;$$

$$x^2-x+3 = (x+t)^2;$$

$$x^2-x+3-x^2-2xt-t^2=0;$$

$$x(-1-2t) = t^2-3;$$

$$x = \frac{t^2-3}{-1-2t};$$

$$dx = \frac{2t(-1-2t)+2(t^2-3)}{(1+2t)^2} dt =$$

$$= \frac{-2t-4t^2+2t^2-6}{(1+2t)^2} dt = \frac{-2t^2-2t-6}{(1+2t)^2} dt.$$

Перейдемо до інтегрування раціональної функції:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}} &= \int \frac{(-2t^2-2t-6)(-1-2t)dt}{(1+2t)^2(t^2-3)\left(\frac{t^2-3}{-1-2t}+t\right)} = \\
&= -2 \int \frac{(t^2+t+3)(1+2t)(1+2t)dt}{(1+2t)^2(t^2-3)(t^2-3-t-2t^2)} = -2 \int \frac{(t^2+t+3)dt}{(t^2-3)(-t^2-t-3)} = \\
&= 2 \int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+3}-x+\sqrt{3}} \right| + C \blacksquare
\end{aligned}$$

3. Інтеграли, які "не беруться"

Із викладеного видно, що не кожену функцію можна проінтегрувати в класі елементарних функцій. Доведено, що існують функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Про такі інтеграли говорять, що вони "не беруться". Це, зокрема:

$$1. \int e^{-x^2} dx - \text{інтеграл Пуассона.}$$

2. $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля.
3. $\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм.
4. $\int \frac{\cos x dx}{x}$ – інтегральний косинус.
5. $\int \frac{\sin x dx}{x}$ – інтегральний синус.
6. $\int x^\alpha \cos x dx, \int x^\alpha \sin x dx, \int x^\alpha e^x dx$ ($\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$) та низка інших.

Такі інтеграли існують, але не є елементарними функціями, тобто є такими що не виражаються через скінченне число арифметичних операцій над елементарними функціями. Це так звані *неелементарні (спеціальні) функції*. Спеціальні функції табульовані та використовуються у багатьох прикладних задачах.

? Контрольні запитання

1. Наведіть приклади тригонометричних виразів, які можна інтегрувати безпосередньо.
2. Що таке універсальна підстановка? Переваги та недоліки її використання.
3. Як інтегрувати добуток двох (кількох) тригонометричних функцій?
4. Якою підстановкою інтегруються функції вигляду $R(-\sin x, \cos x)$?
5. Як інтегрувати ірраціональні функції?
6. Коли зручно використовувати підстановки Ейлера?
7. Інтеграли від яких функцій "не беруться"? Що є результатом інтегрування таких функцій?