Львівський державний університет безпеки життєдіяльності ДСНС України

Кафедра прикладної математики і механіки

ТЕМА 8. СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.
ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЛЕКЦІЙНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ 2 КУРСУ
З ДИСЦИПЛІНИ СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Мета лекції:

Навчальна: вивчити елементи СМО та їх характеристики, стаціонарний потік, потік без післядії, ординарний потік, пуасонівський потік, марковські випадкові процеси, СМО з очікуванням, з відмовами, з обмеженнями**,** замкнуті системи масового обслуговування, моделювання системи масового обслуговування, графи станів системи масового обслуговування, рівняння Ерланга.

Виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.

Розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

План

Література

1. *Аршинова О.І., Шевченко А.В.* Системний аналіз. Навч. посібник. – К.: НАУ, 2008. – 128 с.
2. *Роїк О.М., Шиян А.А., Нікіфорова Л.О.* Системний аналіз. Навч. посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2015. – 83 с.
3. *Кузик А.Д.* Основи системного аналізу. – Львів: ЛДУ БЖД, 2005. – 100 с.
4. *Кунда Н.Т.* Дослідження операцій у транспортних системах. – К.: Видавничий Дім “Слово”, 2008. – 400 с.
5. *Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д.* Дослідження операцій. – К.: Центр учбової літератури, 2007.– 256 с.
6. *ТахаХ.* Введение в исследование операций. –6-е изд.: Пер. с англ. –М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. – 912 с.

Час проведення: 4 години.

Місце проведення: лекційний зал.

Забезпечення заняття: мультимедіа.

1. Основні поняття та функціонування систем масового обслуговування.

Теорія масового обслуговування або **теорія черг** – це один з розділів теорії ймовірностей. Основи теорії системи масового обслуговування (СМО) закладені у працях датського інженера і математика А. К. Ерланга и становлять важливу частину теорії керування та планування виробництва. Черги – це явище, яке часто зустрічається у повсякденному житті. Вони можуть приймати різні форми. Наведемо деякі приклади виникнення черг у системах масового обслуговування.

Ситуація	**Хто/що чекає**	**Процес обслуговування (на що чекає)**
Супермаркет	Покупець	Оплата за покупки
Приймальна лікаря	Пацієнт	Консультація
Комп’ютер	Програма	Виконання процесором
Телефонний номер	Абонент	З’єднання з процесором

Предметом дослідження теорій масового обслуговування стали такі галузі як транспорт, торгівля, медицина, комп’ютерна техніка та інші, де маємо справу з обслуговуванням. Зрозуміло, що діяльність оперативних служб, таких як, пожежна охорона, служба цивільного захисту, поліція, швидка допомога теж може розглядатись як система масового обслуговування.

Вивчення черг в системах масового обслуговування дозволяє визначити критерії функціонування систем масового обслуговування, серед яких найбільш важливими є середній час очікування в черзі, довжина черги та інші. Ця інформація використовується потім для розрахунку витрат на обслуговування та витрат, які несе система в результаті очікування клієнта. Звичайно, феномен очікування не можна виключити без додаткових розходів, але в деяких системах масового обслуговування, наприклад у швидкій допомозі, ціна втрат, що пов’язані з довгим очікуванням, може бути дуже високою.

Основними елементами систем масового обслуговування є **клієнт** (вимога, заявка на обслуговування, або просто об’єкт обслуговування) і **сервіс** (канал, засіб обслуговування).

Вимоги поступають в системи масового обслуговування з джерела. Потрапивши до системи вони можуть потрапити одразу на обслуговування або очікувати у черзі, якщо канал обслуговування зайнятий.

Основними етапами, які проходить вимога у системі масового обслуговування є:

1. Поява у системі з джерела (вхід).
2. Проходження черги (очікування).
3. Процес обслуговування, після якого вимога залишає систему.

Кожен етап має свої характеристики, які потрібно врахувати при побудові математичної моделі.

Основними ***характеристиками входу (джерела)*** є:

1.1. число вимог на вході;

1.2. режим поступлення вимог в систему масового обслуговування;

1.3. поведінка вимог (клієнтів).

1.1. Число потенційно можливих вимог може вважатися скінченним або нескінченним. Якщо число вимог, що поступило на вхід системи з моменту початку процесу обслуговування до будь-якого заданого моменту часу є лише малою частиною потенційно можливої кількості вимог, то число на вході вважається **нескінченним**. Прикладом можуть бути автомобілі, що проїжджають через пропускні пункти на швидкісних дорогах, покупці в супермаркеті. В більшості моделей черг на вході розглядають саме необмежений випадок.

Прикладом системи масового обслуговування зі скінченним числом можуть бути комп'ютери, які належать до конкретних організацій, що поступають на обслуговування в ремонтну майстерню.

1.2. Вимоги можуть поступати в систему обслуговування згідно з певним графіком (один пацієнт на прийом до стоматолога кожні півгодини, одна деталь на конвеєрі кожні 20 хв.) або випадковим чином.

Появи вимог вважаються випадковими, якщо вони незалежні одна від одної й точно передбачити їх неможливо. Часто в задачах масового обслуговування число появ вимог за одиницю часу можна оцінити за допомогою Пуассонівського закону розподілу, при заданій інтенсивності вимог (наприклад, дві вимоги за годину, десять викликів за добу). Дискретний розподіл Пуассона описується формулою:

$$P_n = \frac{e^{-a} \cdot a^n}{n!},\ n = 0,\ 1,\ \ldots, \tag{8.1}$$

де $a = \lambda\tau$ – середнє число подій, що відбуваються протягом часу τ, λ – інтенсивність потоку за одиницю часу, P_n – ймовірність поступлення n вимог за час τ.

Приклад 8.1. Нехай інтенсивність потоку вимог, що описується законом Пуассона, – дві вимоги за годину. Знайти ймовірність того, що протягом години до системи не поступить жодної вимоги, дві вимоги, дев'ять?

Розв'язання. Інтенсивність вимог $\lambda = 2$ (год$^{-1}$), $a = \lambda\tau = \lambda$. Ймовірність того, що протягом години до системи не поступить жодної вимоги за формулою (8.1)

$$P_0 = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

Ймовірність того, що протягом години до системи поступить дві вимоги

$$P_2 = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!} = \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2} \approx 0{,}135 \cdot 2 = 0{,}27.$$

Ймовірність того, що протягом години до системи поступить дев'ять вимог

$$P_9 = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^9}{9!} = \frac{e^{-2} \cdot 2^9}{9!} \approx 0{,}00019.$$

На практиці ймовірність появи вимог, звичайно, не завжди підкорюється закону Пуассона, вони можуть мати якийсь інший розподіл, тому потрібно проводити додаткові дослідження для того, щоб переконатись, що Пуассонівський розподіл може бути хорошою апроксимацією.

1.3. Більшість моделей черг базується на припущенні, що кожна вимога, що надходить до системи, стає в чергу, очікує обслуговування й не залишає систему до тих пір, поки не буде обслугована. Але на практиці може виникнути ситуація, коли вимоги (клієнти) йдуть з системи, не дочекавшись обслуговування.

Основними ***характеристиками черги*** є:

2.1. довжина черги;

2.2. правила обслуговування.

2.1. Довжина черги може бути обмежена або необмежена. Довжина черги обмежена, якщо через деякі причини вона не може збільшуватися до безмежності. Якщо черга досягає свого максимального значення, то наступна вимога в систему не допускається. Довжина черги необмежена, якщо в черзі може знаходитись велика кількість вимог. Наприклад, черга авто на митниці.

2.2. Більшість реальних систем використовує правило «перший прийшов – перший пішов», тобто обслуговування у порядку надходжень вимог у систему. В деяких випадках до цього правила можуть встановлюватися різні пріоритети. Наприклад, пацієнт з інфарктом у критичному стані буде мати пріоритет у обслуговуванні в порівнянні з пацієнтом, який зламав собі палець; проїзд спец. автомобілів (пожежних, медичних, автомобілі служби ДАІ) мають пріоритет при регулюванні дорожнього руху.

У деяких системах діють інші правила обслуговування, наприклад, «останній обслуговується першим».

Основними ***характеристиками процесу обслуговування*** є:

3.1. конфігурація систем масового обслуговування;

3.2. режим обслуговування.

3.1 Конфігурація систем масового обслуговування – це кількість каналів обслуговування. Зазвичай кількість каналів обслуговування можна визначити як кількість вимог (клієнтів), обслуговування яких може проводитись одночасно. Наприклад, кількість касирів, кількість колонок на заправці, кількість процесорів. Інша характеристика конфігурації – кількість фаз обслуговування та послідовність етапів обслуговування однієї вимоги.

Прикладом одноканальної системи масового обслуговування може бути банк, де відкрите тільки одне віконце для обслуговування клієнтів, або Макдрайв. Однофазовими є системи, в яких клієнт обслуговується в одному пункті, а потім залишає систему. Ресторан, в якому офіціант отримує замовлення, приносить його та отримує гроші – це приклад однофазової системи. Якщо замовлення потрібно зробити в одному місці, оплатити його в іншому, а отримати його в третьому, то ми маємо справу з багатофазовою системою масового обслуговування.

3.2. Режим обслуговування, так само як режим поступлення вимог, може характеризуватися сталим або випадковим часом обслуговування. При сталому часі обслуговування на одного клієнта витрачається один і той самий час. Така ситуація може спостерігатися на автоматичній мийці авто. Але частіше зустрічаються ситуації, коли час обслуговування – це випадкова величина. Причому часто можна припустити, що час обслуговування має експоненціальний розподіл з функцією розподілу

$$F(\tau) = P(t \le \tau) = 1 - e^{-\tau\mu}, \qquad (8.2)$$

де $P(t \le \tau)$ – ймовірність того, що фактичний час t обслуговування вимоги не буде більше за τ; μ – середня кількість вимог, що обслуговуються за одиницю часу.

2. Випадковий характер надходження вимог і обслуговування.

Потік вимог у процесах масового обслуговування найчастіше характеризується умовами, притаманними потокам, що описуються законом Пуассона. Вони мають особливо прості властивості. Наведемо кілька означень.

Потік подій називають **стаціонарним**, якщо ймовірність попадання того чи іншого числа подій на проміжок часу довжиною τ залежить тільки від довжини проміжку і не залежить від того, де саме на осі часу розташовано цей проміжок.

Для стаціонарного потоку характерна постійна інтенсивність (щільність) вимог. Звичайно потік може мати місцеві згущення та розрідження, але вони не мають закономірного характеру.

На практиці часто зустрічаються потоки вимог, які можна вважати стаціонарними. Наприклад, потік автомобілів на автомагістралі в інтервалі часу з 10-ої до 12-ої години ранку можна розглядати як стаціонарний, хоча той ж потік протягом доби вже не буде стаціонарним, основна інтенсивність руху вдень значно більша ніж вночі.

Така справа з більшістю фізичних процесів, які називають стаціонарними, а в дійсності вони стаціонарні лише на обмеженому проміжку часу.

Потік подій називають **потоком без післядії**, якщо для будь-яких проміжків часу, що не перекриваються, кількість подій, які попали на один з них, не залежить від кількості подій, які попали на інші.

Відсутність післядії в потоці означає, що події, які утворюють потік, з'являються в послідовні моменти часу незалежно одна від одної. Наприклад, транспортний потік, що рухається автомобільною дорогою, на якій відсутнє світлофорне регулювання, можна вважати потоком без післядії, тому що він утворений з авто, що потрапили на цю дорогу за причин, не пов'язаних між собою. Проте умову відсутності післядії буде порушено при світлофорному регулюванні, основні моменти звільнення перехрестя від авто залежні між собою (аналогічно потік пасажирів у метро).

Доцільно відзначити що вихідний потік тобто потік вимог, які після обслуговування залишають систему, зазвичай мають післядію, навіть якщо вхідний потік її немає. Післядію вихідного потоку потрібно враховувати, якщо він є вхідним для іншої системи масового обслуговування або при багаторазовому обслуговуванні.

Потік подій називають **ординарним**, якщо ймовірністю попадання на елементарну ділянку Δt двох або більше подій можна знехтувати в порівнянні з ймовірністю попадання однієї події.

Якщо потік має всі три властивості, тобто він стаціонарний, без післядії і ординарний, то його називають **найпростішим** або **стаціонарним Пуассонівським потоком.** Далі будемо розглядати стаціонарні Пуассонівські потоки.

Для стаціонарного Пуассонівського потоку ймовірність появи на фіксованому проміжку часу τ точно n подій виражається формулою (8.1).

Важлива характеристика потоку – розподіл довжини проміжку між сусідніми подіями. Якщо проміжок часу між двома довільними подіями в стаціонарному Пуассонівському потоці випадкова величина t, то щільність розподілу випадкової величини t визначається формулою

$$f(\tau) = F'(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau},$$

тобто випадкова величина t має експоненціальний розділ.

Таким чином, якщо випадковий процес описується законом Пуассона з параметром λ, то інтервали між подіями розподілено за експоненціальним законом з тими же параметром λ. Відповідності між експоненціальним розділом з інтенсивністю λ і розподілом Пуассона наведено у таблиці 8.1.

Таблиця 8.1.

	Експоненціальний розподіл	**Розподіл Пуассона**
Випадкова змінна	Час t між надходженням вимог	Кількість вимог, що надходять до системи протягом часу t
Значення випадкової величини	$t \geq 0$	n = 0, 1, 2, …
Щільність розподілу ймовірностей (ймовірність)	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$P_n = \dfrac{e^{-a} \cdot a^n}{n!}$
Середнє значення	$\dfrac{1}{\lambda}$ часових одиниць	$\lambda \cdot t$ протягом часу t
Функція розподілу ймовірностей	$P(t \leq A) = 1 - e^{-\lambda A}$	$P_{n \leq N}(t) = \sum_{i=0}^{N} P_i(t)$
Ймовірність того, що не надійде жодної вимоги протягом часу A	$P(t > A) = e^{-\lambda A}$	$P_0(A) = e^{-\lambda A}$

3. Загальна модель системи масового обслуговування.

Нехай маємо СМО з стаціонарним Пуасонівським потоком вимог. Позначимо:

n – кількість вимог в СМО (в черзі та на обслуговуванні);

λ_n – інтенсивність поступлення вимог, при умові, що в системі вже знаходиться n вимог;

μ_n – інтенсивність вихідного потоку, при умові, що в системі знаходиться n вимог;
P_n – ймовірність того, що в системі знаходиться n вимог.

В загальній моделі СМО встановлюється зв'язок P_n від λ_n та μ_n. Ці ймовірності використовуються для визначення функціональних характеристик СМО таких як: довжина черги, середній час очікування та середній коефіцієнт використання сервісів (каналів).

Стани СМО зручно зображати у вигляді графа, вершини якого – стани, а дуги – переходи від одного стану до іншого. Дугам ставиться у відповідність інтенсивності переходу від одного стану до другого.

Оскільки ймовірність появи в системі більше однієї вимоги протягом малого проміжку часу прямує до нуля, то граф станів СМО для загальної моделі можна зобразити так:

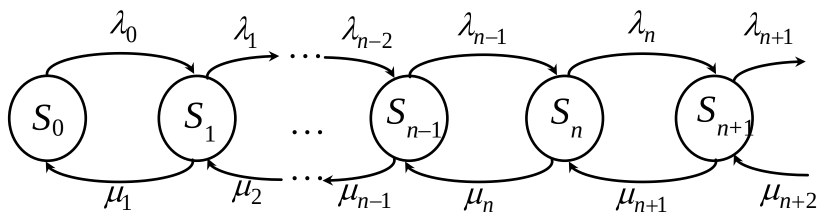

Рис. 8.1.

де S_n – стан, при якому в системі знаходиться n вимог.

Тобто, при $n > 0$ стан S_n може змінитися у двох можливих напрямках: до S_{n-1} з інтенсивністю μ_n, коли вимога, яку обслужили, залишає систему, або до стану S_{n+1}, з інтенсивністю λ_n, коли вимога надійшла до системи.

Стан S_0 може помінятися лише до стану S_1, оскільки залишити вже порожню систему вимоги не можуть.

При вивчені загальних моделей СМО припускається, що інтенсивність вихідного потоку та вхідного у стані S_n рівні між собою, тобто

$$\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1} = \lambda_n \cdot P_n + \mu_n \cdot P_n,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (8.3)$$

Рівняння (8.3) називають **рівняннями балансу**. Рівняння балансу розв'язується рекурентно.

При $n = 0$ з рис. 8.1 рівняння балансу матиме вигляд $\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$, звідки $P_1 = \left(\dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\right) P_0$.

При $n = 1$ маємо $\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1$, звідки $P_2 = \left(\dfrac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1}\right) P_0$ і т.д.

В результаті отримаємо

$$P_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\ldots\mu_1}\right) P_0,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (8.4)$$

Приклад 8.2. СМО задана графом станів. Знайти ймовірності P_n.

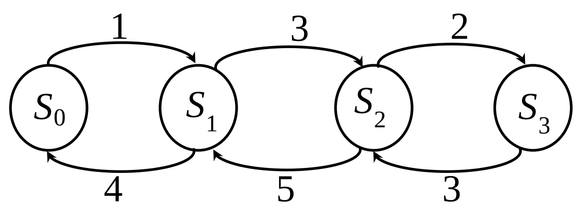

Рис. 8.2.

Розв'язання. За формулою (8.4) та з рис. 8.2 маємо:

$$P_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) P_0 = \frac{1}{4} P_0;$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1}\right) P_0 = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 4} P_0 = \frac{3}{20} P_0;$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1}\right) P_0 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 4} P_0 = \frac{1}{10} P_0.$$

Оскільки $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$, то

$$P_0 + \frac{1}{4} P_0 + \frac{3}{20} P_0 + \frac{1}{10} P_0 = 1 \Rightarrow \frac{30}{20} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

Тоді $P_1 = \frac{1}{4} P_0 \approx 0,167$; $P_2 = \frac{3}{20} P_0 = 0,1$; $P_3 = \frac{1}{10} P_0 \approx 0,067$.

Таким чином, більшу частину часу (66,7%) система знаходиться в стані S_0.

Системи масового обслуговування класифікують за різними ознаками: за кількістю каналів обслуговування (одноканальні СМО та багатоканальні СМО), за довжиною черги (СМО з обмеженням за довжиною черги та СМО без обмеження за довжиною черги), за наявністю черги (СМО з відмовами та СМО з чергою) тощо.

В залежності від типу СМО виведені формули для знаходження функціональних характеристик СМО, основними з яких є:

- ймовірність відмови у обслуговуванні, $P_{відм}$;
- пропускна здатність системи;
- середня кількість вимог у черзі ($\overline{n}_{черг}$);
- середня кількість вимог у системі ($\overline{n}_c$);
- середній час очікування в черзі ($\overline{t}_{черг}$);
- середній час перебування у системі ($\overline{t}_c$);
- середня кількість зайнятих каналів обслуговування $\overline{c}$.

Розглянемо деякі типи СМО. При цьому будемо вважати, що всі потоки є стаціонарними Пуассонівськими потоками.

4. Одноканальна СМО з обмеженням за довжиною черги.

Розглянемо роботу одноканальної СМО з обмеженням за довжиною черги на наступному прикладі.

Приклад 8.3. АЗС має одну колонку зі стоянкою на 3 автомобілі. Якщо стоянка зайнята, то черговий автомобіль, що надходить до станції проїжджає повз. Потік автомобілів, що під'їжджають до АЗС має інтенсивність 4 автомобілі за годину, а процес заправки триває в середньому 12 хв.

Потрібно визначити:

- ймовірність відмови;
- середнє число автомобілів, що очікують заправки;
- середнє число автомобілів, що перебувають на АЗС;
- середню тривалість очікування автомобілів в черзі;
- середню тривалість перебування автомобіля на АЗС.

Розв'язання. Інтенсивність вхідного потоку не залежить від кількості машин, що перебувають на заправці й дорівнює $\lambda = 4$ год$^{-1}$. Інтенсивність вихідного потоку $\mu = \frac{1}{12}$ хв$^{-1}$= 5 год$^{-1}$.

Побудуємо граф станів (рис. 8.3).

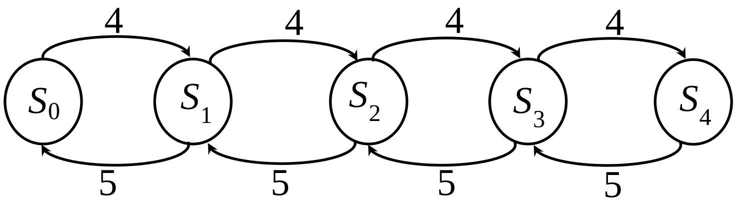

Рис. 8.3.

Обчислимо ймовірності $P_i \ , i = \overline{0,4}$:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, \ P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0, \ P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0, \ P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0.$$

Позначимо $z = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}8$. Оскільки $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$, то

$P_0 + z \cdot P_0 + z^2 \cdot P_0 + z^3 \cdot P_0 + z^4 \cdot P_0 = 1$, тобто $P_0(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + 0{,}8^3 + 0{,}8^4) = 1$.

Для обчислення суми скористаємось формулою суми скінченно спадної геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, де q – знаменник геометричної прогресії, b_1 – перший член геометричної прогресії. Отримаємо

$1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + 0{,}8^3 + 0{,}8^4 = \frac{1 \cdot (0{,}8^5 - 1)}{0{,}8 - 1} \approx 3{,}36$. Звідки $P_0 \cdot 3{,}36 = 1$, $P_0 \approx 0{,}3$.

Отже,

$P_1 = z \cdot P_0 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24;$

$P_2 = z^2 \cdot P_0 = 0{,}8^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}19;$

$P_3 = z^3 \cdot P_0 = 0{,}8^3 \cdot 0{,}3 = 0{,}15;$

$P_4 = z^4 \cdot P_0 = 0{,}8^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12.$

З ймовірністю P_4 на АЗС знаходиться 4 автомобілі й вимога (автомобіль) залишає АЗС без заправки, тобто $P_4 = 0{,}12$ – це ймовірність відмови.

Середня довжина черги (середня кількість вимог в черзі $\bar{n}_{черг}$) визначається як математичне сподівання кількості вимог, що знаходиться в черзі

Кількість вимог у черзі	0	1	2	3
Ймовірність	$P_0 + P_1$	P_2	P_3	P_4

$\bar{n}_{черг} = 0 \cdot (P_0 + P_1) + 1 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3 + 3 \cdot P_4 = 0{,}19 + 0{,}3 + 0{,}36 = 0{,}85$, тобто в черзі знаходиться в середньому 1 автомобіль.

Середнє число автомобілів, що перебувають на АЗС (середня кількість вимог у системі $\bar{n}_c$) дорівнює сумі кількості вимог у черзі ($\bar{n}_{черг}$) та кількості вимог, що обслуговуються ($\bar{n}_{обс}$), тобто

$$\bar{n}_c = \bar{n}_{черг} + \bar{n}_{обс}.$$

Знайдемо $\bar{n}_{обс}$ як математичне сподівання випадкової величини “кількість вимог, що обслуговуються”

Кількість вимог, що обслуговується	0	1
Ймовірність	P_0	$1 - P_0$

$\bar{n}_{обс} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot (1 - P_1) = 0{,}7$. Тоді $\bar{n}_c = 0{,}85 + 0{,}7 = 1{,}55$.

Отже, на АЗС перебуває в середньому 1,55 авто.

Середню тривалість очікування автомобілів в черзі ($\bar{t}_{черг}$) визначимо, аналізуючи можливі стани системи з таких міркувань.

З імовірністю P_0 канал (АЗС) вільний, і автомобіль не очікуватиме, тобто $t_{черг} = 0$; з імовірністю P_1 авто потрапить на АЗС під час обслуговування іншого авто, але перед іншим не буде черги і він чекатиме протягом часу $\frac{1}{\mu}$ – середня тривалість обслуговування; з ймовірністю P_2 в черзі перед авто стоятиме ще один автомобіль, тому він буде чекати протягом часу $\frac{2}{\mu}$ і, нарешті з ймовірністю P_3 в черзі буде перед авто два інших авто плюс машина на обслуговуванні, тому авто буде чекати $\frac{3}{\mu}$. Обчислимо

$$\bar{t}_{черг} = P_1 \cdot \frac{1}{\mu} + P_2 \cdot \frac{2}{\mu} + P_3 \cdot \frac{3}{\mu} = 0,24 \cdot \frac{1}{5} + 0,19 \cdot \frac{2}{5} + 0,15 \cdot \frac{3}{5} = 0,214(год.) = 13(хв.)$$

Зауваження. Середня тривалість очікування дорівнює середньому числу вимог у черзі, поділеному на інтенсивність потоку вимог $\bar{t}_{черг} = \frac{\bar{n}_{черг}}{\lambda}$.

Середня тривалість перебування вимоги в системі $\bar{t}_c$ дорівнює сумі тривалості очікування в черзі й тривалості обслуговування, тобто

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{черг} + \bar{t}_{обс}.$$

Ймовірність того, що вимогу буде прийнято на обслуговування дорівнює 1 – $P_{відм}$, час обслуговування дорівнює $\frac{1}{\mu}$, тому

$$\bar{t}_c = \bar{t}_{черг} + (1 - P_{відм}) \cdot \frac{1}{\mu} = \bar{t}_{черг} + (1 - P_4) \cdot \frac{1}{\mu} = 0,21 + 0,88 \cdot \frac{1}{5} = 0,386(год.) = 23,16(хв.)$$

Контрольні запитання.

1. Що являється основними елементами системи масового обслуговування?
2. Сформулюйте основні етапи, які проходить вимога у системі масового обслуговування.
3. Опишіть основні характеристики джерела у системі.
4. Опишіть основні характеристики черги у системі.
5. Опишіть основні характеристики процесу обслуговування у системі.
6. Який потік подій називають стаціонарним Пуассонівським потоком?

Завдання на самопідготовку.

1. Віртуальний університет ЛДУ БЖД [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/
2. Системний аналіз та теорія прийняття рішень [Електронний ресурс] / Чмир Оксана Юріївна. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1765

Доцент
кафедри прикладної математики і механіки Оксана Чмир

Лекція обговорена на засіданні
кафедри прикладної математики і механіки

Протокол № від “ ” серпня 20 р.