

План

1. Обчислення площ плоских фігур.
2. Обчислення площі криволінійного сектора.
3. Обчислення довжини кривої.
4. Обчислення координат центра мас плоскої фігури.
5. Обчислення об'ємів тіл обертання.
6. Чисельні методи інтегрування.

Література: 1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с. 2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

Основним застосуванням визначеного інтеграла є обчислення площ плоских фігур. Крім цього, з допомогою визначеного інтеграла можна обчислювати довжини кривих, площі поверхонь фігур, об'єми тіл обертання, координати центра мас, що використовуються під час розв'язування прикладних задач.

1. Обчислення площ плоских фігур

Геометричний зміст визначеного інтеграла – це площа криволінійної трапеції, яка утворена графіком функції $y=f(x)$, віссю Ox , прямими $x=a$, $x=b$ (рис. 1).

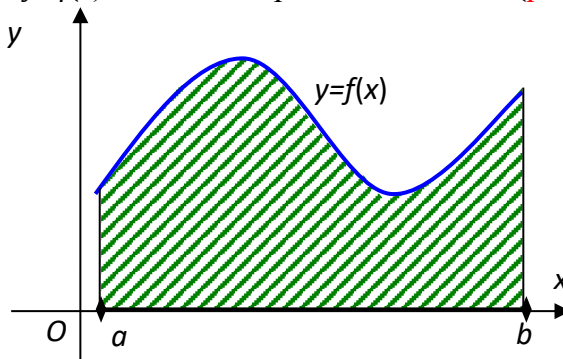


Рис. 1. Криволінійна трапеція

У даному випадку площа криволінійної трапеції обчислюватиметься за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо потрібно знайти площу фігури, обмеженої двома графіками функцій $y=f(x)$, $y=g(x)$ (рис. 2) та вертикальними прямими $x=a$, $x=b$, використовують формулу, яка отримується з властивостей визначеного інтеграла:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

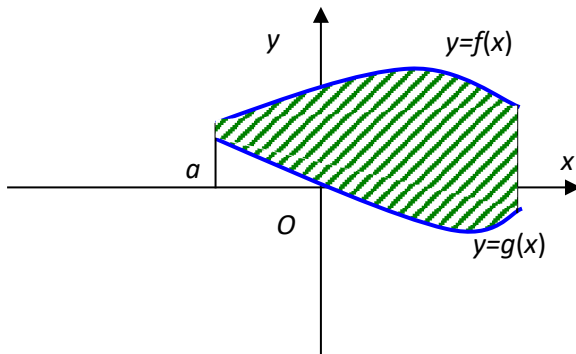


Рис. 2. Фігура, обмежена графіками двох функцій

В окремих випадках ліва границя $x=a$ (чи права границя $x=b$) може виродитися в точку перетину кривих $y=f(x)$, $y=g(x)$. У цьому величини a та b знаходяться як абсциси точок перетину вказаних кривих (рис. 3).

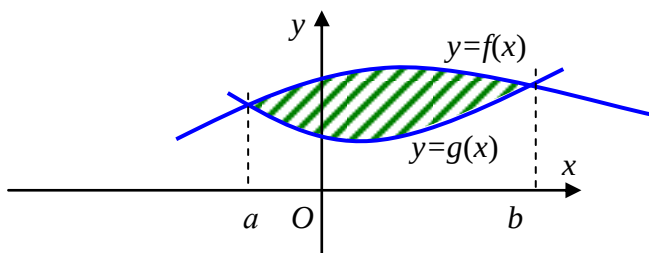


Рис. 3. Фігура, обмежена графіками двох функцій, та точки їх перетину

У випадку складних фігур для обчислення їх площ розбиваємо їх на прості фігури і до кожної застосовуємо одну з вказаних вище формул.

Отже, ці формули дають змогу обчислити площі плоских фігур, якщо відомі функції, які задають межі фігур на площині.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$ (рис. 4).

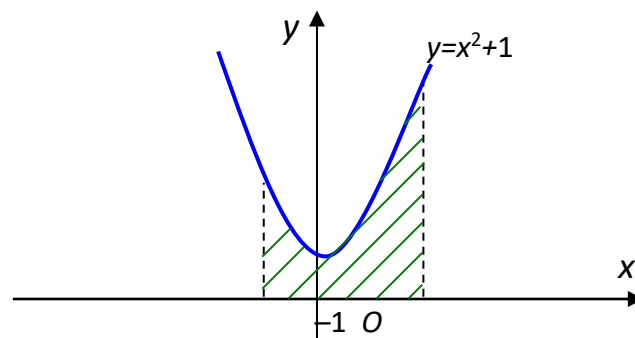


Рис. 4. Знаходження площі фігури

□ Згідно з рис. 4 та відповідною формулою площі криволінійної трапеції маємо

$$S = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=\sin x$, $x=-\pi/2$, $x=\pi$, $y=0$ (рис. 5).

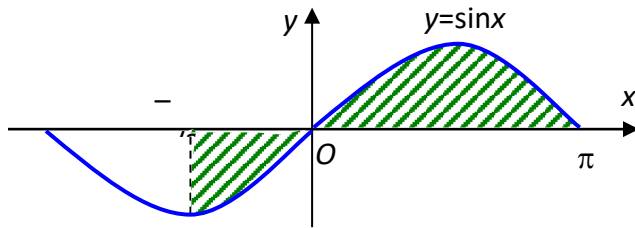


Рис. 5. Знаходження площі фігури

□ Оскільки фігура складається з двох частин, то розбиваємо її площу на суму площ кожної фігури, до кожної з яких застосуємо відповідні формули:

$$S = -\int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\pi/2}^0 - \cos x \Big|_0^{\pi} = 3$$

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=2x+3$ (Рис. 6).

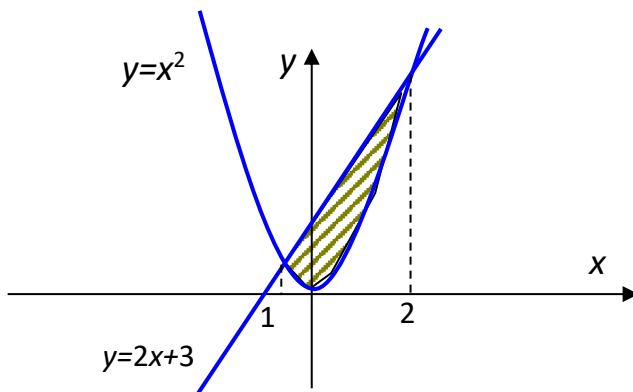


Рис. 6. Знаходження площі фігури

□

Знайдемо точки перетину графіків, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Розв'язками системи є точки $x=-1$, $x=2$. Тоді площа фігури обчислюється за наступною формулою:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (2x + 3 - x^2) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(2^2 + 6 - \frac{2^3}{3} \right) - \left((-1)^2 - 3 - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 12 - 3 = 9 (\text{кв.од.}) \end{aligned}$$

Отже, наведені приклади ілюструють порядок обчислення площ фігур з допомогою визначеного інтеграла.

2. Обчислення площі криволінійного сектора

Розглянемо плоску фігуру OAB , обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho=\rho(\varphi)$ і променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ (рис. 7).

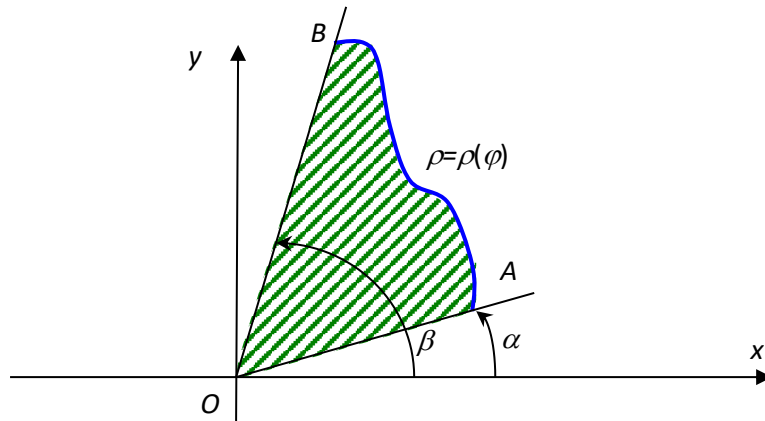


Рис. 7. Криволінійний сектор

Таку фігуру називають *криволінійним сектором* і його площу обчислюють за формулою :

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад. Знайти площу круга, заданого полярними координатами $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$.

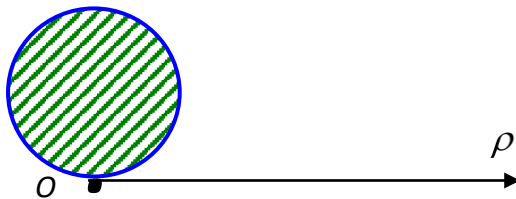


Рис. 8. Круг в полярній системі координат

□ Так як круг лежить вище осі Ox (полярної осі) (рис. 8), то значення кута φ змінюється від 0 до π . Тому згідно із формулою знаходження площі криволінійного сектору маємо:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 3 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi.$$

3. Обчислення довжини кривої

Нехай крива є графіком функції $y=f(x)$. Тоді її довжина на відрізку $[a, b]$ (рис. 9) визначається за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

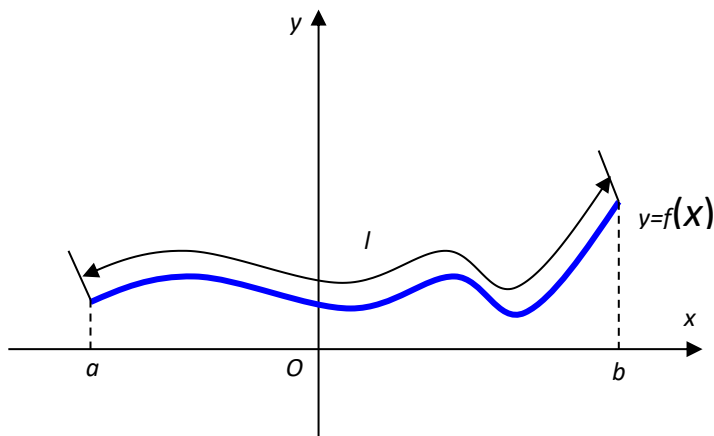


Рис. 9. Довжина кривої

Нехай крива є графіком функції $x=g(y)$. Тоді її довжина на відрізку $[c, d]$ визначається за формулою:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy.$$

Для кривої, заданої параметричним способом, тобто $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$, її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2} dt.$$

Нехай крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ в полярних координатах. Тоді її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln \cos x$, обмеженої точками з абсцисами $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$.

□ Так як $y' = -tgx$, то $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + tg^2 x} = \frac{1}{\cos x}$.

Маємо:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln tg \frac{3}{8} \pi. \blacksquare$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої, заданої параметрично: $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.

□ Так як $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t, y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$, то

$$\sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} = 3a |\sin t \cos t| = \frac{3a}{2} |\sin 2t|$$

Так як функція $|\sin 2t|$ має період $\frac{\pi}{2}$, то

$$l = 4 \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a. \blacksquare$$

4.Обчислення координат центра мас плоскої фігури

Нехай маємо плоску фігуру сталої густини, обмежену лініями $y=f_2(x)$ та $y=f_1(x)$, і яка проектується на вісь Ox у відрізок $[a; b]$ (рис. 10) Координати центра мас цієї фігури визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}, \quad y_c = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}.$$

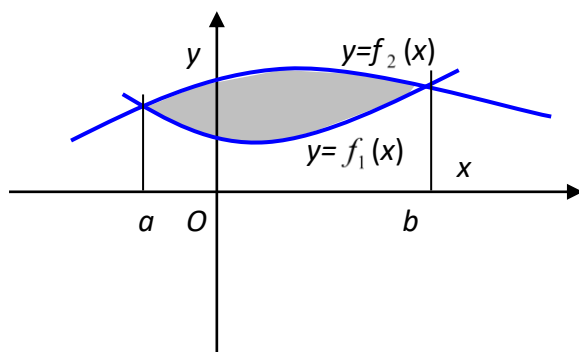


Рис. 10. Плоска фігура

Приклад. Обчислити координати центра мас фігури обмеженої лінією $y=x^2, y = \sqrt{x}$ (рис. 3.44).

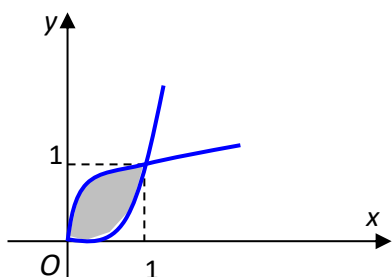


Рис. 10. Плоска фігура

□ Використовуючи формули координат центра мас та метод безпосереднього інтегрування, одержуємо:

$$x_c = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx} = \frac{9}{20}, \quad y_c = \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 (x - x^4)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx} = \frac{9}{20} \quad \blacksquare$$

5.Обчислення об'ємів тіл обертання

Нехай крива є графіком функції $y=f(x)$. Тоді при обертанні кривої навколо осі абсцис (вісь Ox) утворюється **тіло обертання** (рис. 10), об'єм якого визначається за формулою

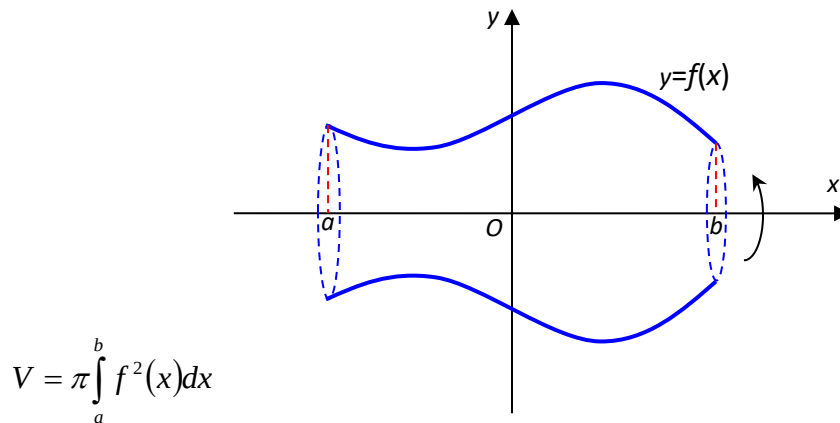


Рис. 10. Тіло обертання

Приклад. Знайти об'єм тіла обертання, обмеженого лініями $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ (рис. 11).

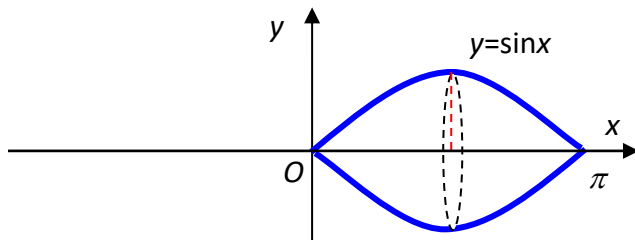


Рис. 11. Тіло обертання

□ Згідно з формулою об'єму тіла обертання маємо:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \blacksquare$$

6. Чисельні методи інтегрування.

У разі, коли обчислення визначеного інтеграла за допомогою заміни та різноманітних перетворень є дуже складними, а іноді навіть неможливими, використовують наближені методи інтегрування, які дістали назву чисельних. Сутність цих методів є в тому, що криволінійну трапецію, площею якої є значення визначеного інтеграла, розбито на численні дрібні геометричні фігури, площу кожної із котрих обчислено окремо. Ці методи дістали назву методу прямокутників, трапецій та методу Сімпсона. Слід зазначити, що розрахунки, які є виконаними за цими методами не є складними за процедурою обчислення. Сама технологія ґрунтується на тому, що значення визначеного інтеграла за ознакою є границею підінтегральної суми, тобто

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta x_i,$$

Однак у багатьох випадках процедура обчислення за численністю арифметичних дій є достатньо громіздкою, і досить часто розрахунки виконують за допомогою програмних засобів. Для більш детального розуміння методів, які безпосередньо ґрунтуються на обчисленні площ фігур, слід нагадати декотрі засоби обчислення площ криволінійних трапецій.

Слід розподілити інтервал інтегрування, на n інтервалів та замінити криволінійну трапецію фігурою, яка є сукупністю n прямокутників таким чином, що висоти цих прямокутників дорівнюють значенням функції $y=f(x)$

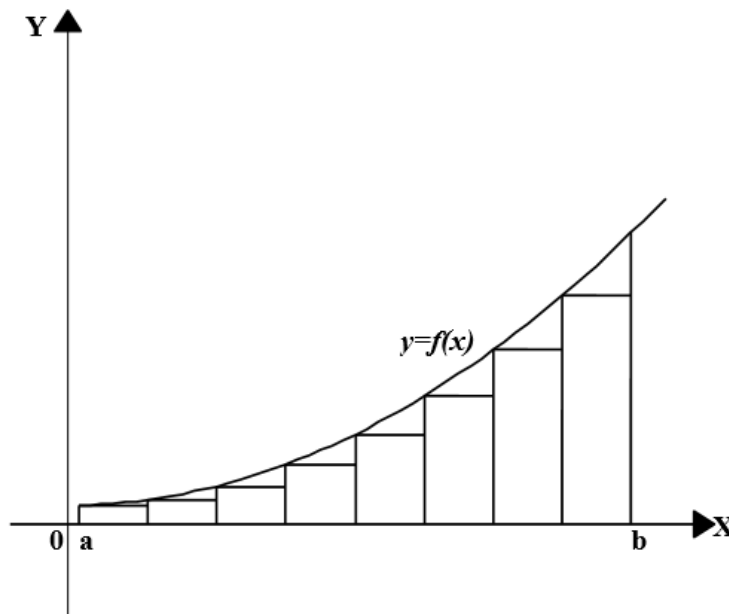
в початкових або кінцевих точках цих інтервалів (метод прямокутників). Чим більша кількість даних інтервалів (кількість n), тим точніше результат.

Площа отриманої фігури може бути обчислена за формулами, що дістали назву формули прямокутників:

$$I_1 = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1});$$

$$I_2 = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

де Δx – довжина кожного інтервалу; y_i – висота (ордината точки, що відповідає кожній x_i)



Обчислення площі за методом прямокутників

Метод трапецій

У разі заміни кожної частки дуги кривої $y=f(x)$ хордою площа отриманої фігури буде більш точнішою. Оскільки в цьому разі кожна з маленьких фігур, отримана внаслідок такого розподілу, є трапецією, то цей метод називається методом трапецій. Відповідно до цього, формулою трапецій для обчислення значення визначеного інтеграла є:

$$I = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Слід зазначити що між формулами трапецій та прямокутників є зв'язок:

$$I \approx \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

Метод Сімпсона

Метод Сімпсона є найточнішим і найскладнішим методом щодо обчислень. Суть методу в тому що кожна дуга інтервалу є заміненою дугою параболи, та в цьому разі значення інтеграла обчислено за формулами, що отримали назву формули Сімпсона:

$$I_s = \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_{n-1} \dots + y_n).$$

Як було зазначено, виконувати такі обчислення із використанням звичайних арифметичних розрахунків досить важко. Тому здебільшого реалізацію використання чисельних методів у обчисленні невизначених інтегралів доцільно здійснювати із використанням будь-яких програмно- обчислювальних засобів.

Одними з таких програм, що використовують для математичних обчислень різноманітного рівня складнощів є програмні середовища *MatLab* та *Maple*.

Приклад.

Обчислити

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

аналітично – зведенням до табличного, за допомогою методів чисельного інтегрування (прямокутників, трапецій та Сімпсона), так і за допомогою *MatLab*:

Інтеграл є дуже простим і його обчислення може бути зведеним до безпосереднього використання табличних інтегралів та формули Ньютона – Лейбніца:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785\,398.$$

Для подальшого порівняння отриманих результатів слід обчислити даний визначений інтеграл за допомогою функції *int*. (використання *MatLab*).

Програма має такий вигляд:

```
>>syms x
>>y=1/(1+x*x);
>>int(y,'x',0, 1)

ans =

1/4*pi

>>format long
>> 1/4*pi

ans =

0.78539816339745
```

Обчислимо значення цього інтеграла аналітично, використовуючи відомі методи наближених обчислень, а саме прямокутників, трапецій та метод Сімпсона.

Нехай $n=10$, тоді $\Delta x=0,1$

Слід обчислити відповідні значення функції:

$$y_0 = 1 \text{ (крок } 0,1)$$

$$y_1 = \frac{1}{1+0,1^2} \approx 0,99$$

$$y_2 \approx \frac{1}{1+0,2^2} \approx 0,962$$

$$y_3 \approx \frac{1}{1+0,3^2} \approx 0,917$$

$$y_4 \approx \frac{1}{1+0,3^2} \approx 0,862$$

$$y_5 \approx \frac{1}{1+0,4^2} \approx 0,8$$

$$y_6 \approx \frac{1}{1+0,5^2} \approx 0,735$$

$$y_7 \approx \frac{1}{1+0,6^2} \approx 0,671$$

$$y_8 \approx \frac{1}{1+0,7^2} \approx 0,61$$

$$y_9 \approx \frac{1}{1+0,8^2} \approx 0,552$$

$$y_{10} \approx \frac{1}{1+0,9^2} \approx 0,5$$

За формулами прямокутників отримано такі значення: $I_1 \approx 0,760$, $I_2 \approx 0,810$. Якщо враховувати, що $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$, то $I \approx 0,785$

Програма обчислення інтеграла за допомогою функції *cumtrapz* має вигляд:

```
>>x=0:0.1:1;
>>y=1./ (1+x.*x) ;
>>cumtrapz (y)

ans =

Columns 1 through 7

0          0.99504950495050    1.97086824067022
2.91035306776973    3.80010314685862    4.63113762961724
5.39878468844077

Columns 8 through 11

6.10200221706296    6.74245073564211    7.32357187834524
7.84981497226790
```

Функція *cumtrapz(y)* виконує процедуру накопичення отриманих розрахунків, тому кінцеве значення і буде відповіддю, тобто в цьому випадку це: 7.84981497226790. Окрім того, за замовчуванням, тобто, якщо не задавати крок інтервалу, то розрахунки виконують за умови $h=1$. У даному випадку $h=0,1$, тому кінцевий результат згідно з формулою трапецій

$$I = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right).$$

$$\text{або } I = h \cdot 7,849 = 0,784$$

За умови використання функції *trapz* розрахунки є більш компактними, та немає необхідності у додаткових математичних діях. Програма обчислення інтеграла за допомогою функції *trapz* має вигляд:

```
>>x=0:0.1:1;
>>y=1./(1+x.*x);
>>S=trapz(x,y)
```

S =

0.78498149722679

Обчислення інтегралів за методом парабол (методом Сімпсона) виконують за допомогою функції *quad*. Програма з обчислення інтегралів за методом Сімпсона є достатньо простою в такому вигляді: *quad('fun',a,b)*, де *fun* – підінтегральна функція; *a,b* – межі інтегрування. Програму з обчислення можна записати у вигляді:

```
>>y='1./(1+x.*x)';
>>quad(y,0,1)
```

ans =

0.78539814924326