

Лекція 1. Похибки

Математичне моделювання і проведення на його основі обчислювального експерименту – могутній і економічно вигідний засіб для проведення не тільки наукових досліджень, а й для виконання найрізноманітніших експериментальних і конструкторських робіт. Так, проведення обчислювальних експериментів при проектуванні літаків і кораблів економічно вигідніше від створення експериментальних зразків і проведення натуральних експериментів, які можуть бути небезпечними для випробовувачів. Крім того, обчислювальний експеримент можна провести для дослідження таких ситуацій, які не можна відтворити в реальних умовах. Саме за допомогою обчислювального експерименту вивчають еволюцію Всесвіту, еволюцію життя на Землі, тобто явища, які ми не здатні спостерігати протягом людського життя.

Зауважимо, що обчислювальний експеримент не може повністю замінити реальний, оскільки він має справу не з самим явищем, а лише його математичною моделлю. Але обчислювальний експеримент може привести до відкриття нових реальних явищ. Підтвердженням цього є відкриття фізичного ефекту Т-шару. Суть цього ефекту полягає в тому, що в плазмі, яка взаємодіє з магнітним полем, за певних умов можуть виникнути зони відносно високої температури. Ці зони називають тепловими шарами або Т-шарами. В них зосереджується електричний струм, який розігріває плазму і підтримує високу температуру. В натурному експерименті ефект Т-шару вдалося виявити лише через декілька років після його відкриття за допомогою обчислювального експерименту у 1968 році під керівництвом А.М. Тихонова і О.А. Самарського.

Завдяки обчислювальному експерименту вдалось розв'язати не тільки багато важливих прикладних задач, а й перевірити деякі гіпотези класичної математики. Відомою топологічною задачею є проблема чотирьох фарб, сформульована ще в 1852 році лондонським студентом Гутрі. Він виявив, що за допомогою чотирьох фарб можна розфарбувати карту Англії так, що кожен два сусідні графства будуть зафарбовані в різні кольори, і висунув гіпотезу про те, що для розфарбовування будь-якої карти на площині досить чотирьох фарб. Ця гіпотеза була підтверджена тільки в 1976 році експериментальними математиками К. Аппелем і В. Хакеном за допомогою ЕОМ.

2. Структура похибки задачі.

Побудувавши математичну модель, намагаються знайти її розв'язок. Для складних прикладних задач, як правило, не існує точного розв'язку у вигляді явних формул або скінченної кількості арифметичних операцій, кожна з яких виконується точно.

Застосовувати чисельні методи для розв'язування прикладних задач на базі ЕОМ треба обережно, оскільки точність знайденого розв'язку залежить від багатьох факторів. При цьому слід оцінити похибку обчисленого розв'язку.

Похибка розв'язку задачі складається з

- похибки математичної моделі
- неусувної похибки
- похибки методу
- обчислювальної похибки.

Похибка математичної моделі пов'язана з тим, що модель описує явище наближено, з припущеннями і спрощеннями. Тому треба мати уявлення про точність кінцевого результату, щоб спростити побудову математичної моделі.

Неусувна похибка зумовлена похибками у вхідних даних задачі. Вона залежить від методу розв'язування задачі. Але щоб правильно обрати метод розв'язування і визначити точність обчислень, важливо знати межі неусувної похибки.

Похибка методу пов'язана з необхідністю заміни неперервної моделі дискретною або з обривом нескінченного ітераційного процесу після скінченної кількості ітерацій.

Обчислювальні похибки пов'язані з похибками округлення чисел.

Число a називається наближеним числом до точного числа A , якщо a не дуже відрізняється від A і замінює останнє в обчисленнях.

Наприклад $A = \sqrt{2}$, $a = 1,41$, $A = \pi$, $A = 3,14159$.

Похибкою Δa наближеного числа a називається різниця

$$\Delta a = A - a$$

Якщо відома похибка Δa наближеного числа a , то точне значення A визначають за формулою

$$A = a + \Delta a.$$

У багатьох випадках знак похибки невідомий і тоді доцільно користуватися абсолютною похибкою наближеного числа. Абсолютною похибкою наближеного числа називають

$$\Delta = |A - a| \quad (1)$$

На практиці найчастіше число A є невідомим. Тому в цьому випадку ми не зможемо визначити абсолютну похибку за формулою (1). Тоді користуються так званою граничною абсолютною похибкою. Гранична абсолютна похибка наближеного числа a – це будь яке число не менше за абсолютну похибку цього числа. Отже, якщо Δa - гранична абсолютна похибка наближеного числа a , то

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta a \quad (2)$$

Якщо відома гранична абсолютна похибка наближеного числа a , то точне число лежить в межах

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$$

Цю формулу записують $A = a \pm \Delta a$.

Приклад. Якщо $A = \pi$, $a = 3,14$, то оскільки $3,14 < \pi < 3,15$, $|\pi - a| < 0,01$. За умови $3,14 < \pi < 3,142$ маємо $|\pi - a| < 0,02$.

На практиці під точністю вимірювань звичайно розуміють граничну абсолютну похибку. Наприклад, якщо відстань між двома пунктами $S = 900$ м отримано з точністю до 0,5 м, то точне значення величини S лежить у межах $899,5 < S < 900,5$.

Уведення абсолютної чи граничної абсолютної похибки звичайно недостатньо для характеристики ступеня точності наближених чисел. Важливим показником точності наближених чисел є їхня *відносна похибка*.

Відносною похибкою δ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки Δ цього числа до модуля відповідного точно го числа A ($A \neq 0$),

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}$$

Граничною відносною похибкою наближеного числа a називається число δ_a яке не менше за відносну похибку цього числа, тобто $\delta_a \geq \delta$.

Точне число A лежить в межах

$$a(1 - \delta_a) \leq A \leq a(1 + \delta_a).$$

Значуща цифра. Число вірних знаків.

Будь-яке число можна подати у вигляді скінченної або нескінченної суми доданків

$$A = \pm(a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots)$$

Приклад

$$476,93 = 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

При реальних обчисленнях усяке число, що має вигляд нескінченної суми доданків, замінюємо скінченною сумою. Кількість розрядів, які застосовуються для зображення числа є скінченна і визначена. Тоді наближене число a , що замінює точне число A , зобразиться як

$$a = \pm(a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1}).$$

Всі десяткові цифри a_i , які зберігаються, називаються *значущими цифрами*. При позиційному зображенні числа a іноді доводиться вводити зайві нулі на початку або в кінці числа, наприклад

$n=5$

$$a_1 = 8 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-6} + 0 \cdot 10^{-7}$$

$$a_1 = 0,0080570$$

$$a_2 = 3 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4$$

$$a_2 = 307400000$$