

Лекція 2. Чисельні методи розв'язування рівнянь з однією змінною. Відокремлення коренів

1. Чисельні методи розв'язування рівнянь з однією змінною

Нехай задано рівняння з однією змінною

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a; b]$.

Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in [a; b]$, при яких рівняння перетворюється в тотожність. Корені рівняння називаються нулями функції $f(x)$. Якщо функція $f(x)$ - алгебраїчний многочлен, то рівняння називається алгебраїчним, якщо функція містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, то рівняння називається трансцендентним.

Знайти точні значення коренів заданого рівняння можна лише в найпростіших випадках функції $f(x)$: алгебраїчних многочленів не вище четвертого степеня, деяких многочленів степеня $n \geq 5$ і деяких трансцендентних функцій.

Універсальних методів для знаходження точних коренів алгебраїчних рівнянь степеня $n \geq 5$ і трансцендентних рівнянь не існує. Крім того, розв'язуючи практичні задачі часто дістають рівняння з коефіцієнтами які є наближеними числами. Тоді постановка задачі знаходження точних коренів не має змісту. Тому важливого значення набувають наближені методи.

Задача знаходження коренів рівняння вважається розв'язаною, якщо корені обчислені з наперед заданою точністю.

Нехай x^* - точний корінь, а $\bar{x}$ - його наближене значення. Кажуть, що корінь $\bar{x}$ обчислено з наперед заданою точністю ε , якщо $|x^* - \bar{x}| \leq \varepsilon$. Нехай наприклад, $x^* \in [a; b]$ і $b - a \leq \varepsilon$, тоді числа a і b - наближені значення кореня x^* відповідно з надлишком і недостаткою. У цьому випадку за наближене значення можна взяти будь-яке число відрізка $[a; b]$.

Знаходження наближених коренів рівняння складається з двох етапів.

1. Відокремлення коренів, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь рівняння.
2. Обчислення коренів рівняння з наперед заданою точністю.

Перший етап називають задачею визначення відрізків ізоляції коренів, а другий – уточненням наближених коренів.

Для знаходження коренів з наперед заданою точністю застосовують методи, які дають можливість уточнювати знайдені наближення коренів.

Корені рівняння (1) можуть бути дійсними і комплексними. Розглянемо випадок дійсних коренів.

2. Відокремлення коренів. Теорема про оцінку наближеного значення кореня.

Щоб відокремити корені, треба розбити область визначення даного рівняння на проміжки, на кожному з яких міститься тільки один корінь рівняння.

Відокремлюють корені графічним і аналітичним методами, а також методом послідовного перебору.

Графічний метод

1. Будуємо графік функції $f(x)$ і знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ox та кінці ізоляції коренів. Часто рівняння (1) записують у вигляді

$$\varphi(x) = g(x)$$

і будують графіки функцій $y_1 = \varphi(x)$, $y_2 = g(x)$, потім знаходять межі, в яких знаходяться абсциси точок перетину графіків функцій.

Приклад. Відокремити корені рівняння

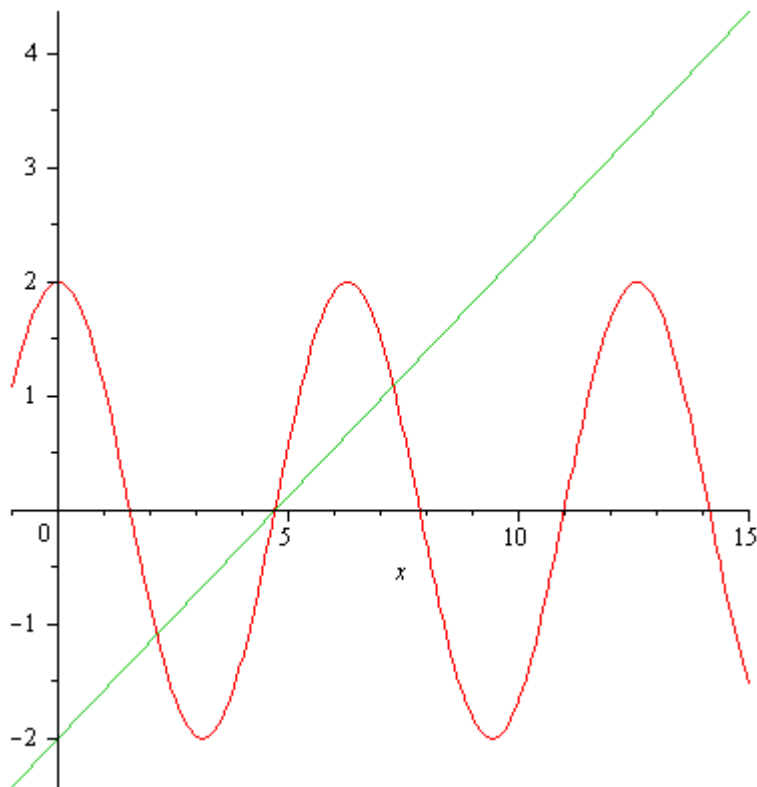
$$f(x) = 2 \cos x - \frac{4}{3\pi} x + 2 = 0 .$$

Розв'язання.

$$2 \cos x = \frac{4}{3\pi} x + 2$$

$$y_1 = 2 \cos x ,$$

$$y_2 = \frac{4}{3\pi} x - 2$$



Аналітичний метод відокремлення коренів ґрунтується на теоремах математичного аналізу.

Теорема 1 (теорема існування кореня). Якщо функція неперервна на $[a;b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значення протилежних знаків, тобто

$$f(b) \cdot f(a) < 0$$

то всередині відрізка $[a;b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційовна на $[a;b]$, набуває на кінцях цього відрізка значення різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак всередині відрізка $[a;b]$, то рівняння $f(x) = 0$ має на цьому відрізку єдиний корінь.

У відповідності з теоремами 1 і 2 алгоритм відокремлення коренів можна сформулювати так:

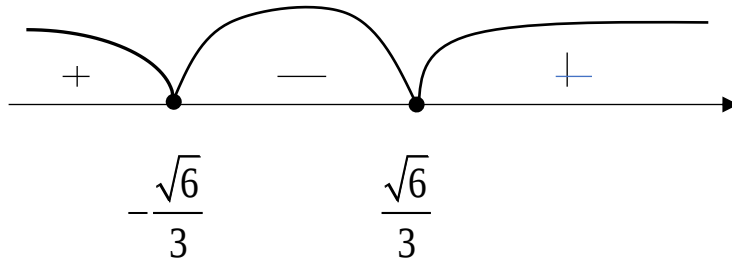
1. Знайти область визначення рівняння.
2. Знайти критичні точки функції $f(x)$.
3. Записати інтервали монотонності функції $f(x)$.
4. Визначити знак функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності.
5. Визначити відрізки, на кінцях яких функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків.
6. Знайдені відрізки ізоляції коренів за необхідності звужити.

Приклад. Відокремити корені рівняння

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

1. Область визначення $x \in \mathbb{R}$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$, $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



3. Визначимо знаки функції на кінцях інтервалів монотонності.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{12\sqrt{6} - 135}{27} < 0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-12\sqrt{6} - 135}{27} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4. Відрізок ізоляції коренів рівняння $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$

5. Звужуємо проміжок ізоляції $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 1$.

$$f(1) < 0, \quad f(2) < 0, \quad f(3) > 0.$$

Отже, корінь рівняння належить відрізку $[2; 3]$.

Нехай на $[a; b]$ функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1, тоді застосовуючи ЕОМ можна відокремити всі корені рівняння крім кратних методом послідовного перебору коренів. Для цього:

1. Беруть початкове значення $x = a$, фіксований крок $\Delta x = h$ і обчислюють значення функції в точках $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$
2. На кінцях кожного з відрізків $[a + ih, a + (i + 1)h]$ визначають знак функції $f(x)$.
3. Якщо знаки однакові, тобто $f(a + ih) \cdot f(a + (i + 1)h) > 0$, то на відрізку $[a + ih, a + (i + 1)h]$ немає кореня. Якщо $f(a + ih) \cdot f(a + (i + 1)h) < 0$, то на відрізку $[a + ih, a + (i + 1)h]$ є корінь рівняння і

$$\bar{x} = a + ih + \frac{1}{2}h$$

наближене значення кореня з точністю

$$\varepsilon = \frac{1}{2}h$$

Метод послідовного перебору коренів пов'язаний з порівняно великим обсягом обчислень і не гарантує втрат коренів рівняння, особливо тоді, коли корені дуже близькі один до одного, а крок h недостатньо малий.

ПРОГРАМА

```

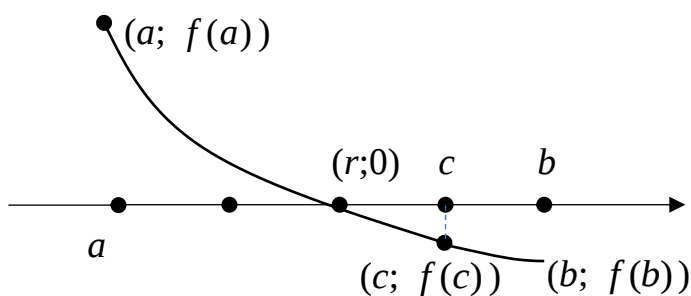
10. PRINT "Ввести [a;b], на якому визначена функція f(x)"
20. INPUT "A=";A; INPUT "B=";B
30. INPUT "Ввести крок h"; H
40. DEF FNF(X)= {запис виразу функції f(x)}
50. X=A: U=FNF(X) {U,V – значення функції на лівому правому кінцях}
60. X=X+H
70. IF X>B THEN 130
80. V=FNF(X)
90. IF SGN (U)=SGN(V) THEN 110
100. PRINT "на [“x-h”; “x”] є корінь"
110. U=V: X=X+H
120. GO TO 70
130. END.

```

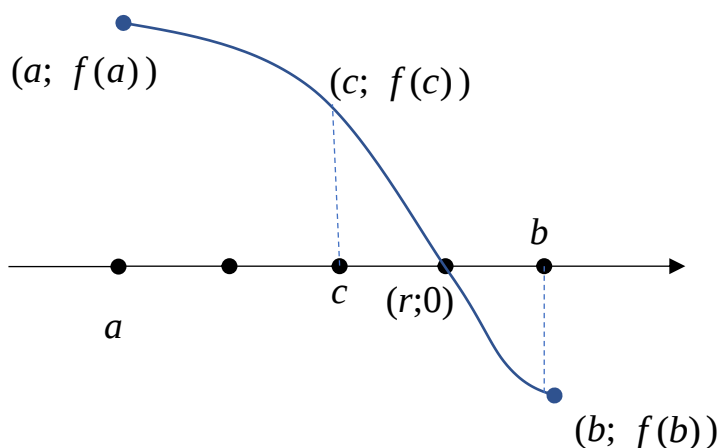
Метод поділу навпіл (метод бісекцій).

Нехай на інтервалі $[a;b]$ $f(b) \cdot f(a) < 0$. Тоді графік неперервної функції $y = f(x)$ перетинає вісь Ox в точці $x = r$.

Виконуємо
стиск справа



Виконуємо
стиск зліва



Метод поділу навпіл зсуває крайні точки все ближче, поки на інтервалі не отримаємо доволіно малий відрізок, який містить нуль функції. Вирішальним кроком процесу поділу інтервалу на половину є вибір середньої точки $c = \frac{a+b}{2}$ і аналіз трьох можливостей, які можуть виникнути:

- якщо $f(a)$ і $f(c)$ мають різні знаки, то нуль належить $[a;c]$
- якщо $f(c)$ і $f(b)$ мають різні знаки, то нуль належить $[c;b]$
- якщо $f(c) = 0$, нулем є c .

В кожному з двох перших випадків ми розглядаємо половину інтервалу як початковий інтервал, який містить корінь і стискаємо його. Продовжуємо процес, позначивши новий менший інтервал $[a;b]$ і продовжуємо процес доти, поки інтервал стане настільки малим, наскільки потрібно. Процес поділу включає послідовність вкладених інтервалів і їх середніх точок.

$[a_0;b_0]$ - початковий інтервал $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ - середня точка;

$[a;b_1]$ - другий інтервал, який містить нуль r і c_1 - його середня точка, довжина інтервала $[a;b_1]$ дорівнює половині довжини $[a_0;b_0]$.

Приклад. $h(x) = x \sin x$. Знайти значення x , яке лежить в інтервалі $[0;2]$, в якому $h(x) = 1$.

Розглянемо $f(x) = x \sin x - 1$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 2$$

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 0,818595,$$

$$c_0 = \frac{0+2}{2} = 1$$

$$f(1) = -0,15829,$$

виконуємо стиск вліво

$$a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2$$

$$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

$$f(c_1) = f(1,5) = 0,496242$$

Корінь належить інтервалу $[1;1,5]$. Виконуємо стиск вправо.