Затверджую
Завідувач кафедри
прикладної математики і
механіки
ЛДУ БЖД

"__" ____________20___ р.

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА

ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ __2__ *КУРСУ*
З ДИСЦИПЛІНИ __СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ__

ТЕМА: № 3 та 4. Розв'язання задач на мережі та потоки

Методична розробка обговорена на засіданні кафедри
Протокол № ____ від _______20 р.

м. Львів

ТЕМА: № 3 та 4. Розв’язання задач на мережі та потоки

Мета заняття

навчальна: ознайомити студентів з основними задачами на мережі та потоки.

виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.

розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

Навчальний час: 4 години.

Місце проведення: згідно з розкладом.

Забезпечення заняття: ПК, МП.

Література:

1. *Махней О.В., Гой Т.П.* (2013). Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 304.
2. *Білоус А.Б., Могила І.А.* (2012). Оптимізаційні задачі на транспорті. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 32 с.
3. *Білоус А.Б., Могила І.А.* (2012). Прикладні задачі дослідження операцій на транспорті. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 36 с.

Структурні елементи заняття

– організаційно-вступна частина;
– вивчення нового матеріалу з одночасним виконанням прикладів на ПК;
– закріплення нового матеріалу;
– видача завдання для самостійного виконання.

Розробила:
доцент кафедри прикладної математики і механіки,
к. ф.-м. наук Оксана Чмир

Задача про максимальний потік.

Припустимо, що потрібно знайти максимальний потік між джерелом *s* та стоком *t*. Позначимо:

x_{ij} – величина потоку, що проходить по дузі (i, j);

c_{ij} – пропускна здатність цієї дуги.

Для кожної проміжної вершини записується обмеження, що задає баланс потоку, який проходить через дану вершину:

загальний вхідний потік = загальний вихідний потік.

Для кожної дуги записується обмеження, що потік не перевищує пропускної здатності дуги та є невід'ємним:

0 ≤ потік по дузі ≤ пропускна здатність дуги.

Функцією мети, яку потрібно максимізувати, є величина потоку, що виходить з джерела *s* або входить у сток *t*.

Приклад 1. Мережа автодоріг, що проходять через Львівську область, може забезпечити пропускні здатності (тис. автомашин за годину), які вказані на рис.1. Потрібно визначити максимальний потік у заданій мережі.

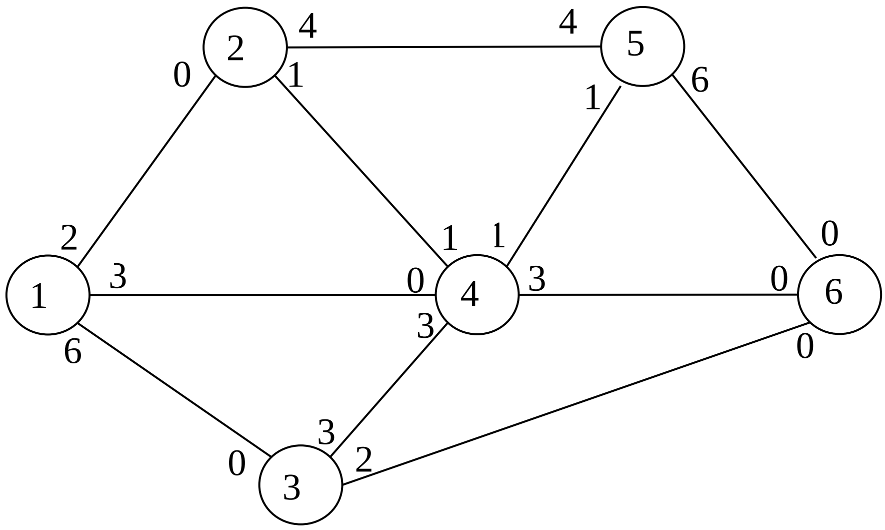


Рис. 1.

Розв'язання:

Запишемо задачу як задачу лінійного програмування. Обмеження для кожної проміжної вершини та функцію мети наведено у таблиці 1. Структура коефіцієнтів, що формують обмеження, має таку особливість: в стовпці, що відповідає змінній x_{ij}, завжди в рядку, що відповідає вершині *i* стоїть – 1, а в рядку, що відповідає вершині *j* стоїть +1. Решта коефіцієнтів дорівнюють нулю. Така структура коефіцієнтів типова для мережевих моделей.

Таблиця 1.

Дуги / Вершини	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{36}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{46}	x_{52}	x_{54}	x_{56}	Вільні члени
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	
2	1	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	= 0
3	0	1	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	= 0
4	0	0	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	0	1	0	= 0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	= 0
Пропускна здатність d_k	2	6	3	1	4	3	2	1	3	1	3	4	1	6	
Коефіцієнти функції мети F_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Max
Коефіцієнти функції мети F_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	Max
Оптимальний план	2	4	3	0	3	2	2	1	0	1	3	0	0	4	

Перепозначимо невідомі величини потоків y_k, пропускні здатності дуг d_k, $k=\overline{1,14}$. Отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$F_1 = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \qquad\qquad F_2 = y_7 + y_{11} + y_{14} \to \max$$

$$A \cdot \bar{y} = \bar{0}, \qquad \text{або} \qquad A \cdot \bar{y} = \bar{0},$$

$$0 \le y_k \le d_k, \qquad\qquad 0 \le y_k \le d_k,$$

де A – матриця коефіцієнтів рівнянь - обмежень (2-5-ий рядок, 2-15-ий стовпець табл.3.1.), $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{14})$, $\bar{0} = (0,0,0,0)$, $k=\overline{1,14}$. Розв'язавши задачу засобами ***Maple*** отримуємо оптимальні значення величин потоків $\bar{y} = (2,4,3,0,3,2,2,1,0,1,3,0,0,4)$.

> *restart*;

Підключаємо пакет ***simplex***

> *with*(*simplex*) :

Задаємо функцію мети L та систему обмежень -- нерівностей ***ineq***

> $L := y_1 + y_2 + y_3$; *ineq* $:= \{y_1 - y_4 - y_5 + y_8 + y_{12} = 0, y_2 - y_6 - y_7 + y_9 = 0, y_3 + y_4 + y_6 - y_8 - y_9 - y_{10} - y_{11} + y_{13} = 0, y_5 + y_{10} - y_{12} - y_{13} - y_{14} = 0, y_1 \ge 0, y_1 \le 2, y_2 \ge 0, y_2 \le 6, y_3 \ge 0, y_3 \le 3, y_4 \ge 0, y_4 \le 1, y_5 \ge 0, y_5 \le 4, y_6 \ge 0, y_6 \le 3, y_7 \ge 0, y_7 \le 2, y_8 \ge 0, y_8 \le 1, y_9 \ge 0, y_9 \le 3, y_{10} \ge 0, y_{10} \le 1, y_{11} \ge 0, y_{11} \le 3, y_{12} \ge 0, y_{12} \le 4, y_{13} \ge 0, y_{13} \le 1, y_{14} \ge 0, y_{14} \le 6\}$;

$$L := y_1 + y_2 + y_3$$

ineq $:= \{y_2 - y_6 - y_7 + y_9 = 0, y_1 - y_4 - y_5 + y_8 + y_{12} = 0, y_5 + y_{10} - y_{12} - y_{13} - y_{14} = 0, y_3 + y_4 + y_6 - y_8 - y_9 - y_{10} - y_{11} + y_{13} = 0, 0 \le y_1, 0 \le y_2, 0 \le y_3, 0 \le y_4, 0 \le y_5, 0 \le y_6, 0 \le y_7, 0 \le y_8, 0 \le y_9, 0 \le y_{10}, 0 \le y_{11}, 0 \le y_{12}, 0 \le y_{13}, 0 \le y_{14}, y_1 \le 2, y_2 \le 6, y_3 \le 3, y_4 \le 1, y_5 \le 4, y_6 \le 3, y_7 \le 2, y_8 \le 1, y_9 \le 3, y_{10} \le 1, y_{11} \le 3, y_{12} \le 4, y_{13} \le 1, y_{14} \le 6\}$

Знаходимо максимум функції L при заданій системі обмежень -- нерівностей ***ineq***

```
> maximize(L, ineq)
```

$$\{y_1 = 2, y_2 = 4, y_3 = 3, y_4 = 0, y_5 = 3, y_6 = 2, y_7 = 2, y_8 = 1, y_9 = 0, y_{10} = 1, y_{11} = 3, y_{12} = 0, y_{13} = 0, y_{14} = 4\}$$

Знаходимо максимальне значення функції L

```
> assign(maximize(L, ineq)); L;
```

$$9$$

Задача про потік найменшої вартості.

Задачу про потік найменшої вартості можна подати у вигляді задачі лінійного програмування. Для кожної вершини записується обмеження, що задає баланс потоку, який проходить через дану вершину:

загальний вхідний потік − загальний вихідний потік =
= потік, що проходить через вершину.

Для кожної дуги записується обмеження, що потік є не меншим, ніж нижня межа пропускної здатності та не перевищує верхньої межі пропускної здатності:

нижня межа ≤ потік по дузі ≤ верхня межа.

Використовуючи прийняті позначення, задачу лінійного програмування для мережі з обмеженою пропускною здатністю можна записати так:

$$F = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{\substack{k \\ (j,k)\in E}} x_{jk} - \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in E}} x_{ij} = f_j,$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij},$$

де E – множина дуг.

Приклад 2. Для перевезення зерна з трьох зерносховищ до трьох агропромислових підприємств використовується залізничний та автомобільний транспорт. Можливі маршрути перевезень зображено на рис. 2. Пропозиція зерносховищ (пункти 1, 2, 3) становить відповідно 100, 200 та 50 тон, а попит агропромислових підприємств (пункти 4, 5, 6) – 150, 80 та 120 тон. На маршрутах, де використовується автомобільний транспорт, є нижнє та верхнє обмеження пропускної здатності. Пропускна здатність залізничного транспорту практично необмежена. Вартість транспортування однієї тони зерна на кожному маршруті (в сотнях гривень) наведено біля відповідної дуги (рис. 2). Потрібно визначити план перевезення найменшої вартості.

Розв'язання.

Нехай x_{ij} – величина потоку, що проходить по дузі (i, j). Обмеження для кожної вершини та функцію мети наведено в табл. 2.

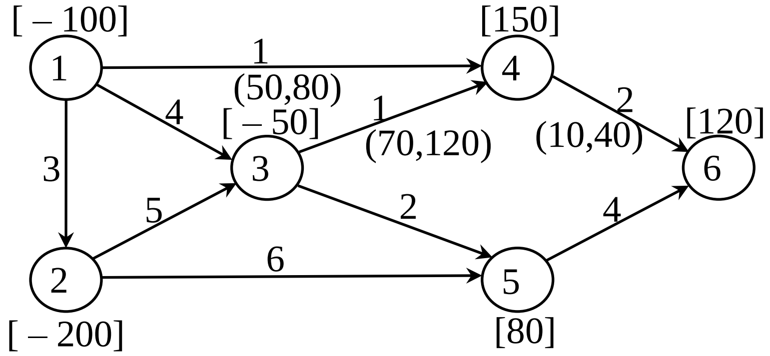


Рис. 2

Таблиця 2.

Дуги / Вершини	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}	Вільні члени
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	= -100
2	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	= -200
3	0	1	0	1	0	-1	-1	0	0	= -50
4	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	= 150
5	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	= 80
6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	= 120
Нижня межа, l_k	0	0	50	0	0	70	0	10	0	
Верхня межа, u_k	∞	∞	80	∞	∞	120	∞	40	∞	
Коефіцієнти c_k функції мети F	3	4	1	5	6	1	2	2	4	min

Перенумеруємо невідомі величини потоків – y_k, коефіцієнти функції мети – c_k, нижні межі пропускної здатності дуг – l_k, верхні межі пропускної здатності дуг – u_k, $k=\overline{1,9}$. Отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$F=\sum_{k=1}^{9} c_k y_k \to \min$$

$$A\cdot \overline{y}=\overline{f},$$

$$l_k \le y_k \le u_k,\ k=\overline{1,9},$$

де A – матриця коефіцієнтів рівнянь-обмежень (2-7-ий рядок, 2-10-ий стовпець табл. 1.), $\overline{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_9)$, $\overline{f}=(-100,-200,-50,150,80,120)$ – вектор вільних членів. Розв’язавши задачу засобами ***Maple*** отримуємо оптимальні значення величин потоків $\overline{y} = (0, 20, 80, 40, 160, 110, 0, 40, 80)$. Загальна вартість перевезень становить 1830·100 = 183 000 грн.

> restart;

Підключаємо пакет ***simplex***

> with(simplex) :

Задаємо функцію мети L та систему обмежень -- нерівностей ***ineq***

> $L := 3\cdot y_1 + 4\cdot y_2 + y_3 + 5\cdot y_4 + 6\cdot y_5 + y_6 + 2\cdot y_7 + 2\cdot y_8 + 4\cdot y_9$; $ineq := \{-y_1 - y_2 - y_3 = -100, y_1 - y_4 - y_5 = -200, y_2 + y_4 - y_6 - y_7 = -50, y_3 + y_6 - y_8 = 150, y_5 + y_7 - y_9 = 80, y_8 + y_9 = 120, y_1 \ge 0, y_1 \le 1000, y_2 \ge 0, y_2 \le 1000, y_3 \ge 50, y_3 \le 80, y_4 \ge 0, y_4 \le 1000, y_5 \ge 0, y_5 \le 1000, y_6 \ge 70, y_6 \le 120, y_7 \ge 0, y_7 \le 1000, y_8 \ge 10, y_8 \le 40, y_9 \ge 0, y_9 \le 1000\}$;

$$L := 3\,y_1 + 4\,y_2 + y_3 + 5\,y_4 + 6\,y_5 + y_6 + 2\,y_7 + 2\,y_8 + 4\,y_9$$

$$ineq := \{y_8 + y_9 = 120, -y_1 - y_2 - y_3 = -100, y_1 - y_4 - y_5 = -200, y_3 + y_6 - y_8 = 150, y_5 + y_7 - y_9 = 80, y_2 + y_4 - y_6 - y_7 = -50, 0 \le y_1, 0 \le y_2, 0 \le y_4, 0 \le y_5, 0 \le y_7, 0 \le y_9, 10 \le y_8, 50 \le y_3, 70 \le y_6, y_1 \le 1000, y_2 \le 1000, y_3 \le 80, y_4 \le 1000, y_5 \le 1000, y_6 \le 120, y_7 \le 1000, y_8 \le 40, y_9 \le 1000\}$$

Знаходимо мінімум функції L при заданій системі обмежень -- нерівностей ***ineq***

> minimize(L, ineq);

$$\{y_1 = 0, y_2 = 20, y_3 = 80, y_4 = 40, y_5 = 160, y_6 = 110, y_7 = 0, y_8 = 40, y_9 = 80\}$$

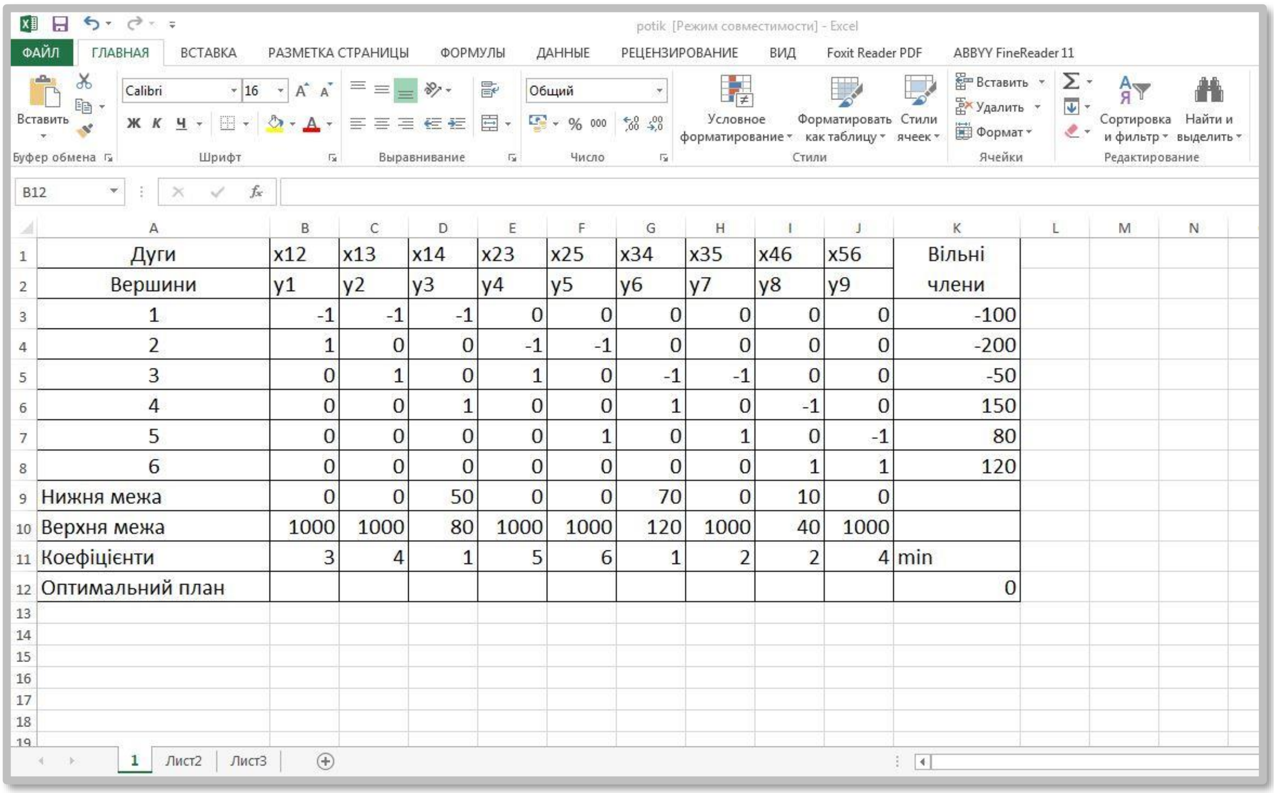
Знаходимо мінімальне значення функції L

> assign(minimize(L, ineq)); L;

$$1830$$

Розв’яжемо задачу в ***Maple***.

Утворюємо Excel-файл 97-2003 з даними таблиці 2. та називаємо його potik.xls (рис. 3), а лист перейменовуємо на 1. У комірку K12 вводимо формулу =СУММПРОИЗВ(B11:J11;B12:J12)*100, в якій буде обчислено найменшу вартість перевезень. Файл має бути розміщений у тій самій папці, що й файл програми ***Maple***. Значення $u_k = \infty$ замінено на достатньо велике скінчене значення, в нашому випадку 1000.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Дуги	x12	x13	x14	x23	x25	x34	x35	x46	x56	Вільні
2	Вершини	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	y9	члени
3	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-100
4	2	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-200
5	3	0	1	0	1	0	-1	-1	0	0	-50
6	4	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	150
7	5	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	80
8	6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	120
9	Нижня межа	0	0	50	0	0	70	0	10	0	
10	Верхня межа	1000	1000	80	1000	1000	120	1000	40	1000	
11	Коефіцієнти	3	4	1	5	6	1	2	2	4	min
12	Оптимальний план										0

Рис. 3.

Після цього файл potik.xls закриваємо.

Відкриваємо ***Maple***. Підключаємо необхідні пакети. Пакет ***ExcelTools*** допоможе нам отримати вхідні дані з таблиці ***Excel*** (рис.3).

```
> restart :
> with(Optimization) : with(ExcelTools) :
```

Імпортуємо дані (табл. 2), що задані у файлі potik.xls (рис. 3).

Коефіцієнти рівнянь-обмежень:

```
> A := Import("potik.xls", "1", "B3:J8") : A := convert(A, Matrix);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1.0 & -1.0 & -1.0 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1.0 & 0. & 0. & -1.0 & -1.0 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1.0 & 0. & 1.0 & 0. & -1.0 & -1.0 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.0 & 0. & 0. & 1.0 & 0. & -1.0 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1.0 & 0. & 1.0 & 0. & -1.0 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Коефіцієнти функції мети:

```
> c := Import("potik.xls", "1", "B11:J11") : c := convert(c, Vector);
```

$$c := \begin{bmatrix} 3.0 \\ 4.0 \\ 1.0 \\ 5.0 \\ 6.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 4.0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Вектор вільних членів:

> $f := Import("potik.xls", "1", "K3:K8") : f := convert(f, Vector);$

$$f := \begin{bmatrix} -100.0 \\ -200.0 \\ -50.0 \\ 150.0 \\ 80.0 \\ 120.0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Нижні межі обмежень:

> $l := Import("potik.xls", "1", "B9:J9") : l := convert(l, Vector);$

$$l := \begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 50.0 \\ 0. \\ 0. \\ 70.0 \\ 0. \\ 10.0 \\ 0. \end{bmatrix} \quad (4)$$

Верхні межі обмежень:

> $u := Import("potik.xls", "1", "B10:J10") : u := convert(u, Vector);$

$$u := \begin{bmatrix} 1000.0 \\ 1000.0 \\ 80.0 \\ 1000.0 \\ 1000.0 \\ 120.0 \\ 1000.0 \\ 40.0 \\ 1000.0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Розв'язуємо задачу лінійного програмування у матричній формі. Отримуємо оптимальне значення функції мети та оптимальний розв'язок:

> $Rozv := LPSolve(c, [NoUserValue, NoUserValue, A, f], [l, u]);$

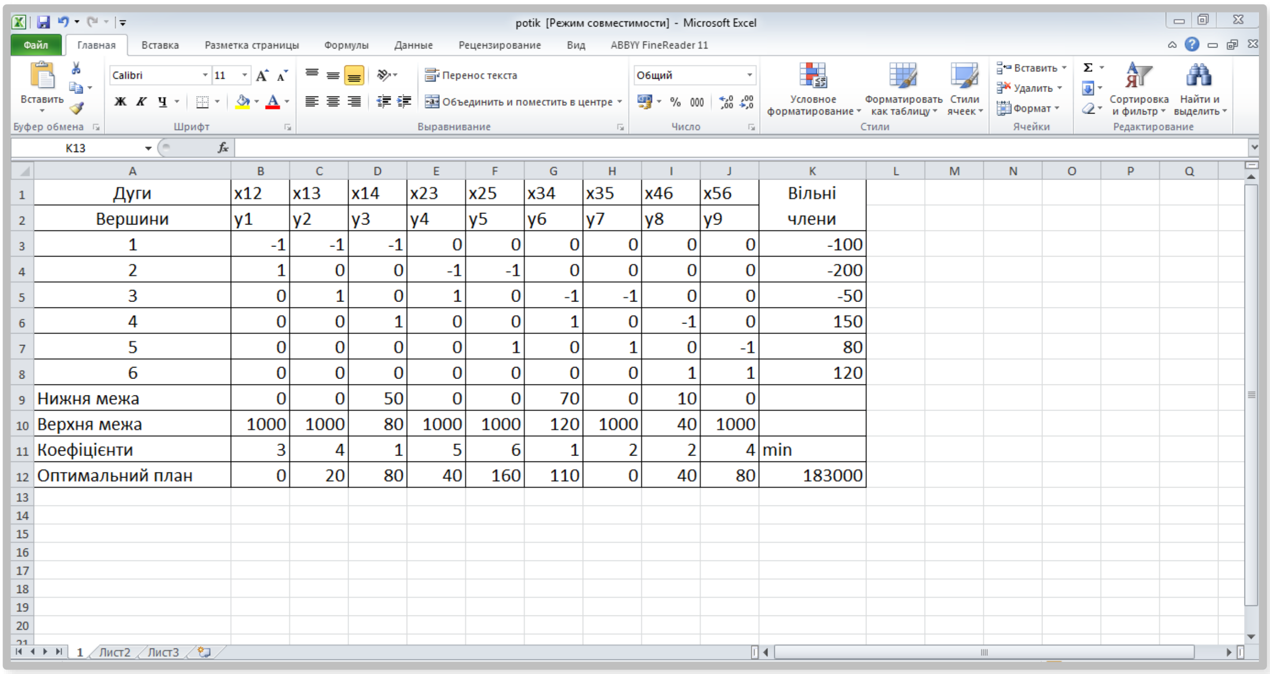
$$Rozv := \left[1830.00000000000, \begin{bmatrix} 0. \\ 19.9999999999997016 \\ 80. \\ 40.0000000000002842 \\ 159.999999999999970 \\ 110.000000000000014 \\ 0. \\ 40. \\ 79.9999999999999574 \end{bmatrix} \right] \quad (6)$$

Експортуємо отриманий розв'язок у файл potik.xls, попередньо транспонуємо його (рис. 4).

> $x := op(2, Rozv);$

$$x := \begin{bmatrix} 0. \\ 19.9999999999997016 \\ 80. \\ 40.0000000000002842 \\ 159.999999999999970 \\ 110.000000000000014 \\ 0. \\ 40. \\ 79.9999999999999574 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

> $x := convert(x, Vector[row]):$
> $Export(x, \text{"potik.xls"}, \text{"1"}, \text{"B12:J12"}):$

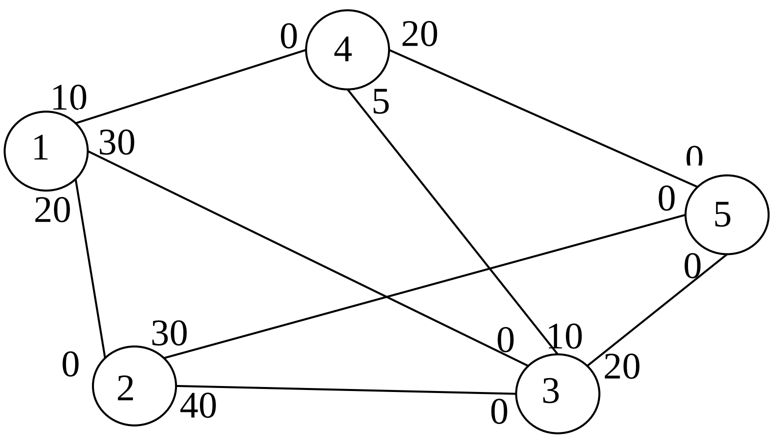


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Дуги	x12	x13	x14	x23	x25	x34	x35	x46	x56	Вільні
2	Вершини	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	y9	члени
3	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-100
4	2	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-200
5	3	0	1	0	1	0	-1	-1	0	0	-50
6	4	0	0	1	0	0	1	0	-1	0	150
7	5	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	80
8	6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	120
9	Нижня межа	0	0	50	0	0	70	0	10	0	
10	Верхня межа	1000	1000	80	1000	1000	120	1000	40	1000	
11	Коефіцієнти	3	4	1	5	6	1	2	2	4	min
12	Оптимальний план	0	20	80	40	160	110	0	40	80	183000

Рис. 4.

Завдання для самостійного виконання.

1. Знайти максимальний потік між пунктами 1 та 5 у мережі, яка зображена графом.



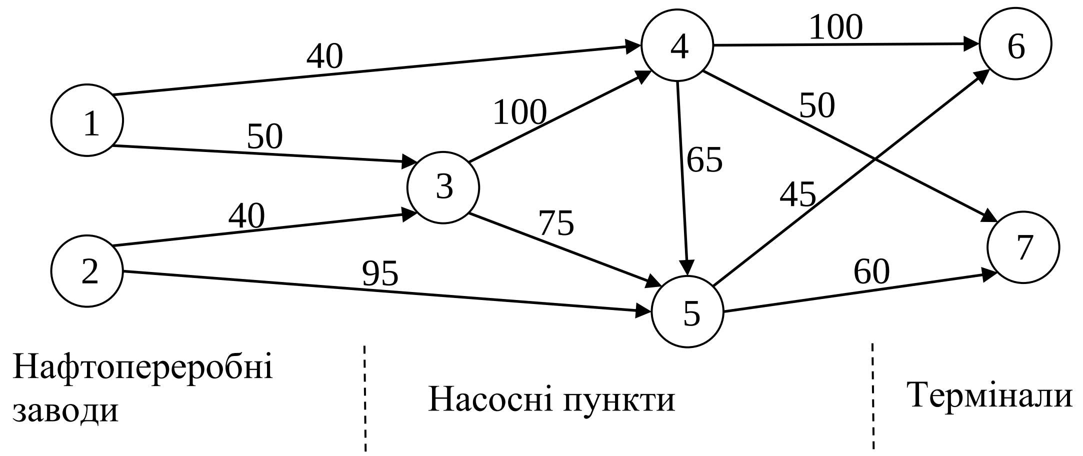
2. Два нафтопереробні заводи транспортують свою продукцію до двох розподільчих терміналів по мережі трубопроводів, яка включає насосні станції.

Напрямки потоків у мережі зображені стрілками у графі. Пропускні здатності трубопроводів в мільйонах барелів в день наведено у графі.

Необхідно:

а) розв'язати задачу про максимальний потік у мережі, використовуючи пакет Maple;

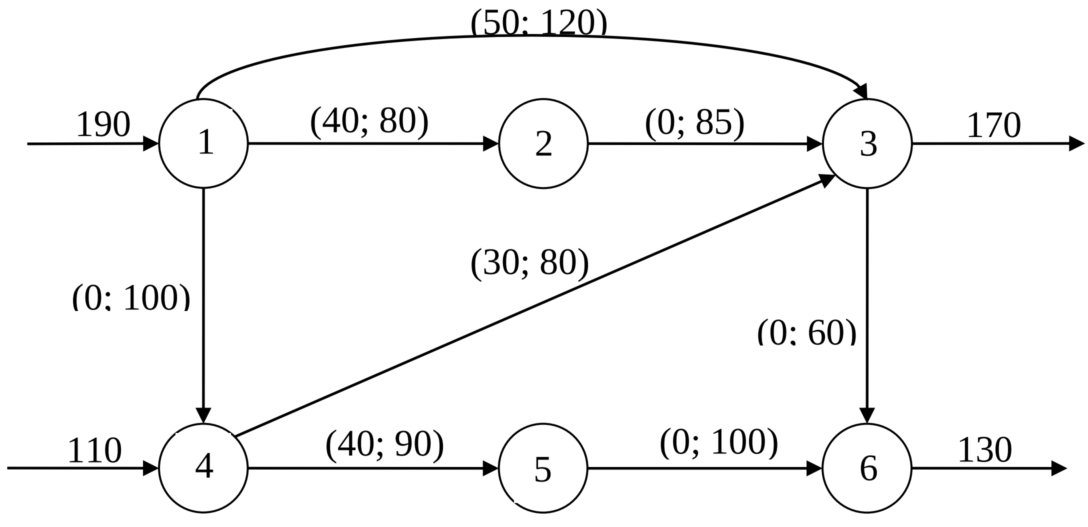
б) сформулювати задачу як задачу лінійного програмування для визначення максимального потоку у мережі та розв'язати її у пакеті Maple.



3. Схему мережі трубопроводів, що зв'язує два водозабірні пункти з двома містами, щоденну продуктивність водозабірних пунктів та щоденну потребу міст (в тис. $м^3$) наведено на рисунку. Транспонування води здійснюється як безпосередньо із водозабірних пунктів до міст, так і через насосні станції. Вартість транспонування 1 тис. $м^3$ води в тис. грн. зазначено в таблиці.

Вартість транспортування							
1 – 2	1 – 3	1 – 4	2 – 3	3 – 6	4 – 3	4 – 5	5 – 6
2,2	0,5	1,4	2,1	2,2	1,2	1,1	2,1

Визначити оптимальний розподіл потоків води по трубопроводах та його вартість, а також продуктивність насосних станцій.



4. Металургійний комбінат використовує для перевезення металопрокату вагони, які орендує в Укрзалізниці. Необхідну кількість вагонів на наступні чотири місяці (липень - жовтень) наведено в табл. 1. Вартість оренди одного вагона залежно від тривалості оренди наведено в табл. 2. Потрібно знайти такий план оренди вагонів, вартість якого є найменшою.

Таблиця 1. Необхідна кількість напіввагонів

Місяць	липень	серпень	вересень	жовтень
Кількість вагонів	100	40	90	120

Таблиця 2. Вартість оренди напіввагонів

Тривалість оренди, міс.	1	2	3	4
Вартість оренди, грн.	300	450	570	660