

Лекція 3. Відокремлення коренів (метод послідовного перебору, метод половинного поділу). Метричні простори і принцип стискуючих відображень. Метод ітерацій.

Нехай на $[a;b]$ функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1, тоді застосовуючи ЕОМ можна відокремити всі корені рівняння крім кратних методом послідовного перебору коренів. Для цього:

1. Беруть початкове значення $x = a$, фіксований крок $\Delta x = h$ і обчислюють значення функції в точках $x_i = a + ih, i=0,1,2,\dots$
2. На кінцях кожного з відрізків $[a + ih, a + (i+1)h]$ визначають знак функції $f(x)$.
3. Якщо знаки однакові, тобто $f(a + ih) \cdot f(a + (i+1)h) > 0$, то на відрізку $[a + ih, a + (i+1)h]$ немає кореня. Якщо $f(a + ih) \cdot f(a + (i+1)h) < 0$, то на відрізку $[a + ih, a + (i+1)h]$ є корінь рівняння і

$$\bar{x} = a + ih + \frac{1}{2}h$$

наближене значення кореня з точністю

$$\varepsilon = \frac{1}{2}h$$

Метод послідовного перебору коренів пов'язаний з порівняно великим обсягом обчислень і не гарантує втрат коренів рівняння, особливо тоді, коли корені дуже близькі один до одного, а крок h недостатньо малий.

ПРОГРАМА

```
10. PRINT "Ввести [a;b], на якому визначена функція f(x) "
```

```
20. INPUT "A=";A; INPUT "B=";B
```

```
30. INPUT "Ввести крок h"; H
```

```
40. DEF FNF(X)=      {запис виразу функції f(x) }
```

```
50. X=A: U=FNF(X)    {U,V – значення функції на лівому правому кінцях}
```

```
60. X=X+H
```

```
70. IF X>B THEN 130
```

```
80. V=FNF(X)
```

```
90. IF SGN (U)=SGN(V) THEN 110
```

```
100. PRINT "на [“x-h”; “x”] є корінь
```

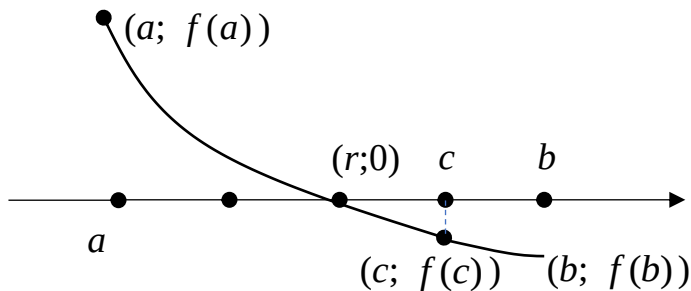
```
110. U=V: X=X+H
```

120. GO TO 70

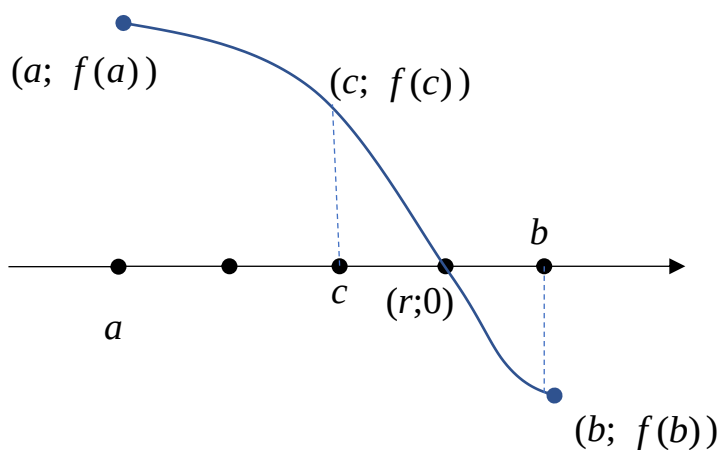
130. END.

Метод поділу навпіл (метод бісекцій).

Нехай на інтервалі $[a;b]$ $f(b) \cdot f(a) < 0$. Тоді графік неперервної функції $y = f(x)$ перетинає вісь Ox в точці $x = r$.



Виконуємо
стиск справа



Виконуємо
стиск зліва

Метод поділу навпіл зсуває крайні точки все ближче, поки на інтервалі не отримаємо доволіно малий відрізок, який містить нуль функції. Вирішальним кроком процесу поділу інтервалу на половину є вибір середньої точки $c = \frac{a+b}{2}$

і аналіз трьох можливостей, які можуть виникнути:

- якщо $f(a)$ і $f(c)$ мають різні знаки, то нуль належить $[a;c]$
- якщо $f(c)$ і $f(b)$ мають різні знаки, то нуль належить $[c;b]$

- якщо $f(c) = 0$, нулем є c .

В кожному з двох перших випадків ми розглядаємо половину інтервалу як початковий інтервал, який містить корінь і стискаємо його. Продовжуємо процес, позначивши новий менший інтервал $[a; b]$ і продовжуємо процес доти, поки інтервал стане настільки малим, наскільки потрібно. Процес поділу включає послідовність вкладених інтервалів і їх середніх точок.

$[a_0; b_0]$ - початковий інтервал $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ - середня точка;

$[a; b_1]$ - другий інтервал, який містить нуль r і c_1 - його середня точка, довжина інтервала $[a; b_1]$ дорівнює половині довжини $[a_0; b_0]$.

Приклад. $h(x) = x \sin x$. Знайти значення x , яке лежить в інтервалі $[0; 2]$, в якому $h(x) = 1$.

Розглянемо $f(x) = x \sin x - 1$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 2$$

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 0,818595,$$

$$c_0 = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$f(1) = -0,15829,$$

виконуємо стиск вліво

$$a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2$$

$$c_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$$

$$f(c_1) = f(1,5) = 0,496242$$

Корінь належить інтервалу $[1; 1,5]$. Виконуємо стиск вправо.

Програма методу поділу навіпіл

10. Метод поділу навіпіл

20. для рівняння $x^3 - 2x - 5$

30. INPUT "Ввести A і B"; A, B

40. INPUT "Ввести точність EPS"; EPS

```

50. DEF FNF(X)=  $x^3 - 2x - 5$ 
60. C=0,5*(A+B): Y=FNF(C)
70. IF B-A=<2*EPS OR Y=0 THEN 110
80. C=0,5*(A+B): Y=FNF(C)
90. IF Y*FNF(A)<0 THEN B=C ELSE A=C
100. GO TO 70
110. X=0,5*(A+B)
120 PRINT “Шуканий корінь X=”; X
130 END

```

Реалізація алгоритму методу половинного поділу мовою Python

```
def dichotomy (a, b, eps):
```

```
    counter =0;
```

```
    while (b-a>eps):
```

```
        c=(a+b)/2.0;
```

```
        if (f(b)*f(c)<0):
```

```
            a=c:
```

```
        else:
```

```
            b=c ;
```

```
print “%d  %.4f  %.4f  %.4f  %.4f  %.4f  %.4f”
```

```
%(counter, a, b, f(a), f(b), c, f(c))
```

```
    counter+=1
```

Метричні простори

Означення. Непорожня множина X елементів довільної природи називається *метричним простором*, якщо будь-яким двом елементам $x, y \in X$ поставлено у відповідність невід’ємне число $\rho(x, y)$, яке задовольняє такі умови:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксіома трикутника).

Елементи множини X називають точками метричного простору, а дійсне число $\rho(x, y)$ - відстанню між елементами x, y .

Метричний простір позначають $R = (X, \rho)$. Властивості 1) – 3) називають аксіомами метричного простору.

Відстань ρ між елементами множини можна визначити по-різному. При цьому дістають простори.

Приклади

1. Множина дійсних чисел з відстанню $\rho(x, y) = |x - y|$ є метричним простором, який позначають R_1 .
2. Множина n -вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

3. Множина n -вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

4. Множина n -вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Наявність відстані між кожними двома елементами метричного простору дає можливість ввести поняття границі послідовності метричного простору.

Означення. Точку x^* довільного метричного простору R називають границею послідовності $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ точок цього метричного простору і записують $x^{(k)} \rightarrow x^*, (k \rightarrow \infty)$ або $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, x^*) = 0$.

Означення. Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ метричного простору називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): (\forall k, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon)$$

тобто

$$\lim_{k, m \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = 0.$$

Зауваження: кожна фундаментальна послідовність є збіжна.

Означення. Метричний простір R називається повним, якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Нехай R_1, R_2 метричні простори, X - певна множина простору R_1 . Якщо кожній точці $x \in X$ за певним правилом поставлено у відповідність точку $y \in R_2$, то кажуть, що на множині X задано оператор (відображення) U і записують $y = Ux$. Множину X називають областю визначення оператора U , y – значенням оператора U або образом точки x .

Нехай $U : R \rightarrow R$ (оператор відображає метричний простір R в себе).

Означення. Якщо існує додатне число $\alpha < 1$ таке, що для будь-яких $x', x'' \in X$ виконується нерівність $\rho(Ux', Ux'') \leq \alpha \rho(x', x'')$, то оператор U називають оператором стиску.

Означення. Точка $x \in X$ називається нерухомою точкою оператора U , якщо $Ux = x$.

Для знаходження нерухомих точок оператора U застосовують метод послідовних наближень. При цьому беруть довільну точку $x_0 \in X$ і послідовно знаходять

$$x_1 = Ux_0, x_2 = Ux_1, \dots, x_k = Ux_{k-1}$$

в результаті дістають послідовність

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

яку називають *послідовністю наближень* або *ітераційною послідовністю*.

Для операторів стиску справедлива теорема про нерухому точку.

Теорема (принцип стискуючих відображень). Якщо оператор стиску U відображає повний метричний простір R у себе, то він має єдину нерухому точку, яку можна дістати методом послідовних наближень при будь-якій початковій точці $x_0 \in R$.

Метод ітерацій

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

де $f(x)$ - неперервна функція. Щоб знайти дійсні корені цього рівняння замінимо його рівносильним

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Щоб розв'язати рівняння (1) використовують метод послідовних наближень (метод ітерацій). Вибирають деяке початкове число x_0 і послідовно обчислюють наступні наближення

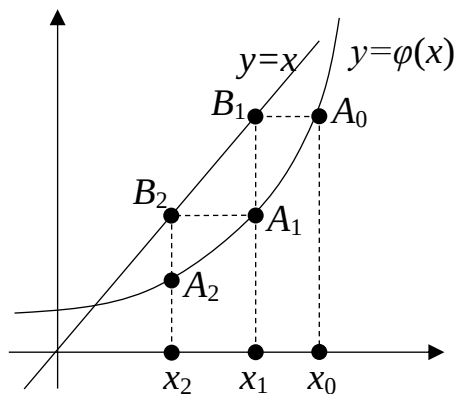
$$x_k = \varphi(x_{k-1}), k=1,2,\dots$$

Якщо послідовність $\{x_k\}$ має границю x^* тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, то ця границя і буде коренем рівняння (1). Збіжність послідовності $\{x_k\}$ забезпечується відповідним вибором функції $\varphi(x)$ і початкового наближення x_0 . Вибираючи по - різному функцію $\varphi(x)$ можна дістати різні ітераційні методи.

Метод ітерацій має простий геометричний зміст. Побудуємо графіки функцій $y = x$, $y = \varphi(x)$. Абсциса точки перетину графіків цих функцій є коренем рівняння.

На відрізку $[a, b]$ довільно вибираємо точку x_0 і проводимо через неї пряму, паралельну осі Oy до перетину з кривою $y = \varphi(x)$ в точці $A_0(x_0; \varphi(x_0))$.

З точки A_0 проводимо пряму, паралельну осі абсцис до перетину з прямою $y = x$. Отримуємо точку B_1 з ординатою $\varphi(x_0)$. Спроектувавши точку B_1 на вісь Ox знаходимо абсцису x_1 , отримуємо точку $B_1(x_1, \varphi(x_0))$. Через x_1 проводимо пряму, паралельну осі ординат до перетину з кривою $y = \varphi(x)$ в точці $A_1(x_1; \varphi(x_1))$.



З точки A_1 проводимо пряму, паралельну осі абсцис до перетину з прямою $y = x$, отримуємо точку $B_2(x_2, \varphi(x_1))$. В результаті спільні абсциси точок A_1 і B_1 , A_2 і B_2 ... є послідовними наближеннями $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ кореня x^* .

Для знаходження кореня рівняння з точністю ε процес ітерації слід продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_{k-1} і x_k не стане справедливою нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

де q – число таке, що

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (3)$$

Рівняння (1) до рівносильного рівняння (2) перетворюють так, щоб в околі кореня x^* виконувалась нерівність (3).

Розглянемо деякі загальні прийоми такого перетворення. Нехай корінь x^* рівняння (1) лежать на відрізку $[a, b]$. Замінімо рівняння (1) рівносильним йому

$$x = x - \lambda f(x) = \varphi(x), \quad \lambda \neq 0 \quad (4)$$

Підберемо сталу λ так, щоб в околі $[a, b]$ кореня x^* виконувалась нерівність

$$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1$$

звідси маємо

$$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1$$

або

$$0 < \lambda f'(x) < 2$$

$$\lambda \leq \frac{2}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|}$$

Іноді рівняння (2) замінюють рівносильним йому

$$x = x - \frac{1}{\mu} f(x), \quad \mu \neq 0. \quad (5)$$

Сталу μ вибирають так, щоб в околі $[a, b]$ кореня x^* справдилась нерівність:

$$|\varphi'(x)| = |1 - \frac{1}{\mu} f'(x)| < 1$$

тобто виконувались умови

$$-1 < 1 - \frac{1}{\mu} f'(x) < 1$$

або

$$0 < \frac{1}{\mu} f'(x) < 2.$$

Остання нерівність виконуватиметься, якщо

$$\frac{f'(x)}{\mu} > 0 \quad \text{і} \quad |\mu| \geq \frac{1}{2} \max |f'(x)| \quad (6)$$

Якщо рівняння $x = \varphi(x)$ таке, що в околі $[a, b]$ кореня x^* має місце нерівність

$$|\varphi'(x)| \geq \nu > 1,$$

то ітераційний процес буде розбіжним. Таке рівняння замінюють рівносильним йому $x = \psi(x)$, де $\psi(x)$ - функція, обернена до $\varphi(x)$. Для останнього рівняння ітераційний процес є збіжним, оскільки

$$|\psi'(x)| = \left| \frac{1}{\varphi'(\psi(x))} \right| \leq \frac{1}{\nu} = q < 1$$

Програма методу ітерацій для рівняння $x = \sqrt[3]{2x+5}$

10 – Метод ітерацій

20 – для рівняння $x = F(x)$

30 -----

40 DEF FNF(x)=(2*x+5)^(1/3)

50 INPUT “Ввести точність наближеного значення кореня”; EPS

60 INPUT “Ввести сталу Q”; Q

70 INPUT “Ввести початкове наближення X0”; X0

80 EPS=EPS*(1-Q)/Q

90 X1=FNF(X0)

100 IF ABS(X1-X0)<=EPS THEN 120

110 X0=X1: GO TO 90

120 PRINT “Шуканий корінь X=”;X1

130 END

Приклад. Перетворити рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5$ до вигляду $x = \varphi(x)$, якщо його корінь $x^* \in [2;3]$.

1 спосіб: оскільки $f'(x) = 3x^2 - 2$ - неперервна і монотонна на $[2;3]$, то

$$\max_{x \in [2;3]} |f'(x)| = f'(3) = 25 ,$$

$$\lambda \leq \frac{2}{\max |f'(x)|} = \frac{2}{25} = 0,08 .$$

Тоді можна покласти $\lambda = 0,078$ і шукане рівняння має вигляд

$$x = x - \lambda f(x) = -0,078x^3 + 1,156x + 0,39 .$$

При цьому для усіх $x \in [2;3]$ справджуватиметься нерівність

$$|\varphi'(x)| \leq 0,95$$

