

Лекція 4. Метричні простори і принцип стискуючих відображень. Метод ітерацій. Метод Ньютона і його модифікації

Метричні простори

Означення. Непорожня множина X елементів довільної природи називається *метричним простором*, якщо будь-яким двом елементам $x, y \in X$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\rho(x, y)$, яке задовольняє такі умови:

- 1) $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксіома трикутника).

Елементи множини X називають точками метричного простору, а дійсне число $\rho(x, y)$ - відстанню між елементами x, y .

Метричний простір позначають $R = (X, \rho)$. Властивості 1) – 3) називають аксіомами метричного простору.

Відстань ρ між елементами множини можна визначити по-різному. При цьому дістають простори.

Приклади

1. Множина дійсних чисел з відстанню $\rho(x, y) = |x - y|$ є метричним простором, який позначають R_1 .
2. Множина n -вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

3. Множина n -вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

4. Множина n -вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Наявність відстані між кожними двома елементами метричного простору дає можливість ввести поняття границі послідовності метричного простору.

Означення. Точку x^* довільного метричного простору R називають границею послідовності $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ точок цього метричного простору і записують $x^{(k)} \rightarrow x^*, (k \rightarrow \infty)$ або $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, x^*) = 0$.

Означення. Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ метричного простору називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): (\forall k, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon)$$

тобто

$$\lim_{k, m \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = 0.$$

Означення. Метричний простір R називається повним, якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Нехай R_1, R_2 метричні простори, X - певна множина простору R_1 . Якщо кожній точці $x \in X$ за певним правилом поставлено у відповідність точку $y \in R_2$, то кажуть, що на множині X задано оператор (відображення) U і записують $y = Ux$. Множину X називають областю визначення оператора U , y – значенням оператора U або образом точки x .

Нехай $U: R \rightarrow R$ (оператор відображає метричний простір R в себе).

Означення. Якщо існує додатне число $\alpha < 1$ таке, що для будь-яких $x', x'' \in X$ виконується нерівність $\rho(Ux', Ux'') \leq \alpha \rho(x', x'')$, то оператор U називають оператором стиску.

Означення. Точка $x \in X$ називається нерухомою точкою оператора U , якщо $Ux = x$.

Для знаходження нерухомих точок оператора U застосовують метод послідовних наближень. При цьому беруть довільну точку $x_0 \in X$ і послідовно знаходять

$$x_1 = Ux_0, x_2 = Ux_1, \dots, x_k = Ux_{k-1}$$

в результаті дістають послідовність

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

яку називають *послідовністю наближень* або *ітераційною послідовністю*.

Для операторів стиску справедлива теорема про нерухому точку.

Теорема (принцип стискуючих відображень). Якщо оператор стиску U відображає повний метричний простір R у себе, то він має єдину нерухому точку, яку можна дістати методом послідовних наближень при будь-якій початковій точці $x_0 \in R$.

Метод ітерацій

Нехай задано рівняння

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

де $f(x)$ - неперервна функція. Щоб знайти дійсні корені цього рівняння замінимо його рівносильним

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

Щоб розв'язати рівняння (1) використовують метод послідовних наближень (метод ітерацій). Вибирають деяке початкове число x_0 і послідовно обчислюють наступні наближення

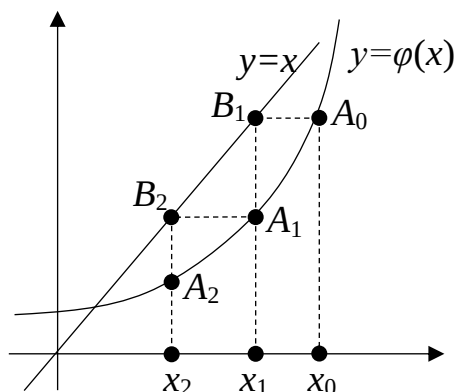
$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k=1,2,\dots$$

Якщо послідовність $\{x_k\}$ має границю x^* тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, то ця границя і буде коренем рівняння (1). Збіжність послідовності $\{x_k\}$ забезпечується відповідним вибором функції $\varphi(x)$ і початкового наближення x_0 . Вибираючи по-різному функцію $\varphi(x)$ можна дістати різні ітераційні методи.

Метод ітерацій має простий геометричний зміст. Побудуємо графіки функцій $y = x$, $y = \varphi(x)$. Абсциса точки перетину графіків цих функцій є коренем рівняння.

На відрізку $[a, b]$ довільно вибираємо точку x_0 і проводимо через неї пряму, паралельну осі Оу до перетину з кривою $y = \varphi(x)$ в точці $A_0(x_0; \varphi(x_0))$.

З точки A_0 проводимо пряму, паралельну осі абсцис до перетину з прямою $y = x$. Отримуємо точку B_1 з ординатою $\varphi(x_0)$. Спроектувавши точку B_1 на вісь Ох знаходимо абсцису x_1 , отримуємо точку $B_1(x_1; \varphi(x_0))$. Через x_1 проводимо пряму, паралельну осі ординат до перетину з кривою $y = \varphi(x)$ в точці $A_1(x_1; \varphi(x_1))$.



З точки A_1 проводимо пряму, паралельну осі абсцис до перетину з прямою $y = x$, отримуємо точку $B_2(x_2, \varphi(x_1))$. В результаті спільні абсциси точок A_1 і B_1 , A_2 і B_2 ... є послідовними наближеннями $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ кореня x^* .

Для знаходження кореня рівняння з точністю ε процес ітерації слід продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_{k-1} і x_k не стане справедливою нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon ,$$

де q – число таке, що

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (3)$$

Рівняння (1) до рівносильного рівняння (2) перетворюють так, щоб в околі кореня x^* виконувалась нерівність (3).

Розглянемо деякі загальні прийоми такого перетворення. Нехай корінь x^* рівняння (1) лежать на відрізку $[a, b]$. Замінімо рівняння (1) рівносильним йому

$$x = x - \lambda f(x) = \varphi(x), \quad \lambda \neq 0 \quad (4)$$

Підберемо сталу λ так, щоб в околі $[a, b]$ кореня x^* виконувалась нерівність

$$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1$$

звідси маємо

$$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1$$

або

$$0 < \lambda f'(x) < 2$$

$$\lambda \leq \frac{2}{\max_{x \in [a, b]} |f'(x)|}$$

Якщо позначити $\mu = \frac{1}{\lambda}$, то остання нерівність перетвориться на нерівність

$$|\mu| \geq \frac{1}{2} \max |f'(x)| \quad (6)$$

Якщо рівняння $x = \varphi(x)$ таке, що в околі $[a, b]$ кореня x^* має місце нерівність

$$|\varphi'(x)| \geq \nu > 1 ,$$

то ітераційний процес буде розбіжним. Таке рівняння замінюють рівносильним йому $x = \psi(x)$, де $\psi(x)$ - функція, обернена до $\varphi(x)$. Для останнього рівняння ітераційний процес є збіжним, оскільки

$$|\psi'(x)| = \left| \frac{1}{\varphi'(\psi(x))} \right| \leq \frac{1}{\nu} = q < 1$$

Програма методу ітерацій для рівняння $x = \sqrt[3]{2x+5}$

10 – Метод ітерацій

20 – для рівняння $x = F(x)$

30 -----

40 DEF FNF(x)=(2*x+5)^(1/3)

50 INPUT “Ввести точність наближеного значення кореня”; EPS

60 INPUT “Ввести сталу Q”; Q

70 INPUT “Ввести початкове наближення X0”; X0

80 EPS=EPS*(1-Q)/Q

90 X1=FNF(X0)

100 IF ABS(X1-X0)<=EPS THEN 120

110 X0=X1: GO TO 90

120 PRINT “Шуканий корінь X=”;X1

130 END

Приклад. Перетворити рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5$ до вигляду $x = \varphi(x)$, якщо його корінь $x^* \in [2;3]$.

1 спосіб: оскільки $f'(x) = 3x^2 - 2$ - неперервна і монотонна на $[2;3]$, то

$$\max_{x \in [2;3]} |f'(x)| = f'(3) = 25 ,$$

$$\lambda \leq \frac{2}{\max |f'(x)|} = \frac{2}{25} = 0,08 .$$

Тоді можна покласти $\lambda = 0,078$ і шукане рівняння має вигляд

$$x = x - \lambda f(x) = -0,078x^3 + 1,156x + 0,39 .$$

При цьому для усіх $x \in [2;3]$ справджуватиметься нерівність

$$|\varphi'(x)| \leq 0,95$$

Метод Ньютона та його модифікації.

Нехай рівняння $f(x) = 0$ на відрізку $[a,b]$ має ізольований корінь x^* , тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, а функції $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні і зберігають знак на $[a,b]$.

Нехай x_k - k -те наближення кореня. Розкладемо в ряд Тейлора $f(x)$ в околі точки x_k .

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \dots$$

Замість рівняння $f(x) = 0$ розглядаємо рівняння $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$, яке враховує тільки лінійну частину ряду Тейлора. Розв'язавши його відносно x дістанемо

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

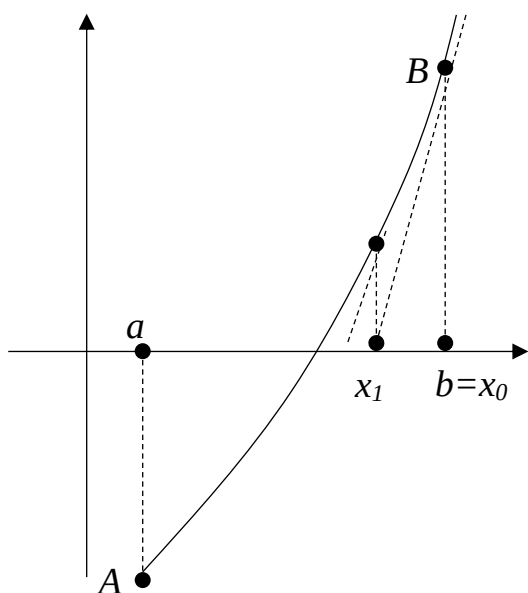
Взявши знайдене значення x за наступне наближення, матимемо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (7)$$

Формула (7) визначає метод Ньютона. Він має просту геометричну інтерпретацію. Значення x_{k+1} є абсцисою точки перетину дотичної

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_k, f(x_k))$. Тому метод Ньютона називають ще методом дотичних.



$$f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0$$

За початкове наближення в методі Ньютона слід брати точку $x_0 \in [a, b]$, в якій

$$f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$$

Метод Ньютона є методом послідовних наближень $x_k = \varphi(x_{k-1})$, де функція

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Для досягнення заданої точності ε ітераційний процес треба продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_k і x_{k-1} не виконуватиметься нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}} \varepsilon$$

де

$$M_2 = \max |f''(x)|, \quad m_1 = \min |f'(x)|$$

Програма методу Ньютона

10' – Метод Ньютона –

20' – для рівняння $f(x) = 0$

30 PRINT “Ввести кінці ізоляції кореня”

40 INPUT “A=”;A: INPUT “B=”;B

50 INPUT “Ввести точність EPS”; EPS

60 INPUT “Ввести min $f(x)$ на $[a,b]$ ”; M1

70 INPUT “Ввести max $f(x)$ на $[a,b]$ ”; M2

80 DEF FNF(X)= : #вираз функції $f(x)$

90 DEF FNY(X)= : #вираз функції $f'(x)$

100 DEF FNZ(X)= : #вираз функції $f''(x)$

110 U=FNF(A):V=FNZ(A) #визначення початкового наближення x_0

120 IF U*V>0 THEN X0=A ELSE X0=B

130 EPS=EPS*SQR(2*M1/M2)

140 P=FNF(X0)/FNY(X0)

150 X=X0-P

160 IF ABS(X-X0)<=EPS THEN 180

170 X0=X: GOTO 140

180 PRINT “Шуканий корінь X=”; X

END

Ітерація Ньютона для знаходження квадратних коренів.

Припустимо, що $A > 0$ – дійсне число, і нехай $p_0 > 0$ - початкове наближення до $\sqrt{A}$. За рекурентним правилом

$$p_k = \frac{p_{k-1} + \frac{A}{p_{k-1}}}{2}$$

послідовність $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ збіжна до $\sqrt{A}$.