

Лекція 5. Метод Ньютона і його модифікації

Метод Ньютона та його модифікації.

Нехай рівняння $f(x) = 0$ на відрізку $[a, b]$ має ізольований корінь x^* , тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, а функції $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні і зберігають знак на $[a, b]$.

Нехай x_k - k -те наближення кореня. Розкладемо в ряд Тейлора $f(x)$ в околі точки x_k .

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \dots$$

Замість рівняння $f(x) = 0$ розглядаємо рівняння $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$, яке враховує тільки лінійну частину ряду Тейлора. Розв'язавши його відносно x дістанемо

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

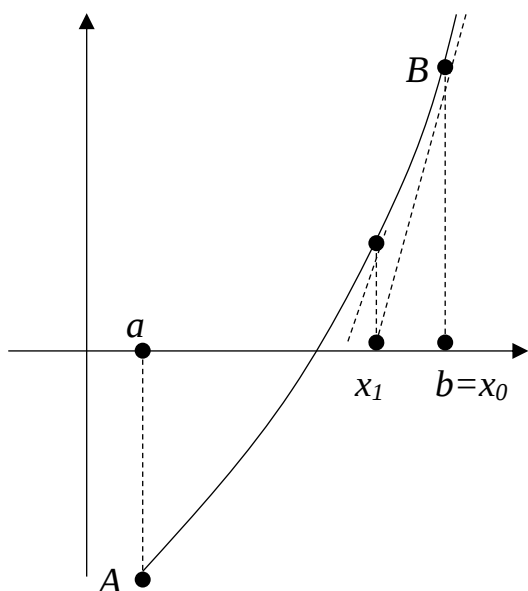
Взявши знайдене значення x за наступне наближення, матимемо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (7)$$

Формула (7) визначає метод Ньютона. Він має просту геометричну інтерпретацію. Значення x_{k+1} є абсцисою точки перетину дотичної

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_k, f(x_k))$. Тому метод Ньютона називають ще методом дотичних.



$$f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0$$

За початкове наближення в методі Ньютона слід брати точку $x_0 \in [a, b]$, в якій

$$f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$$

Метод Ньютона є методом послідовних наближень $x_k = \varphi(x_{k-1})$, де функція

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Для досягнення заданої точності ε ітераційний процес треба продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_k і x_{k-1} не виконуватиметься нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}} \varepsilon$$

де

$$M_2 = \max |f''(x)|, \quad m_1 = \min |f'(x)|$$

Програма методу Ньютона

10' – Метод Ньютона –

20' – для рівняння $f(x) = 0$

30 PRINT “Ввести кінці ізоляції кореня”

40 INPUT “A=”;A: INPUT “B=”;B

50 INPUT “Ввести точність EPS”; EPS

60 INPUT “Ввести $\min f(x)$ на $[a, b]$ ”; M1

70 INPUT “Ввести $\max f(x)$ на $[a, b]$ ”; M2

80 DEF FNF(X)= : #вираз функції $f(x)$

90 DEF FNY(X)= : #вираз функції $f'(x)$

100 DEF FNZ(X)= : #вираз функції $f''(x)$

110 U=FNF(A):V=FNZ(A) #визначення початкового наближення x_0

120 IF U*V>0 THEN X0=A ELSE X0=B

130 EPS=EPS*SQR(2*M1/M2)

140 P=FNF(X0)/FNY(X0)

150 X=X0-P

160 IF ABS(X-X0)<=EPS THEN 180

170 X0=X: GOTO 140

180 PRINT “Шуканий корінь X=”; X

END

Ітерація Ньютона для знаходження квадратних коренів.

Припустимо, що $A > 0$ – дійсне число, і нехай $p_0 > 0$ - початкове наближення до $\sqrt{A}$. За рекурентним правилом

$$p_k = \frac{p_{k-1} + \frac{A}{p_{k-1}}}{2}$$

послідовність $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ збіжна до $\sqrt{A}$, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \sqrt{A}$$

Перевага методу Ньютона перед методом ітерацій у тому, що він має вищу швидкість збіжності.

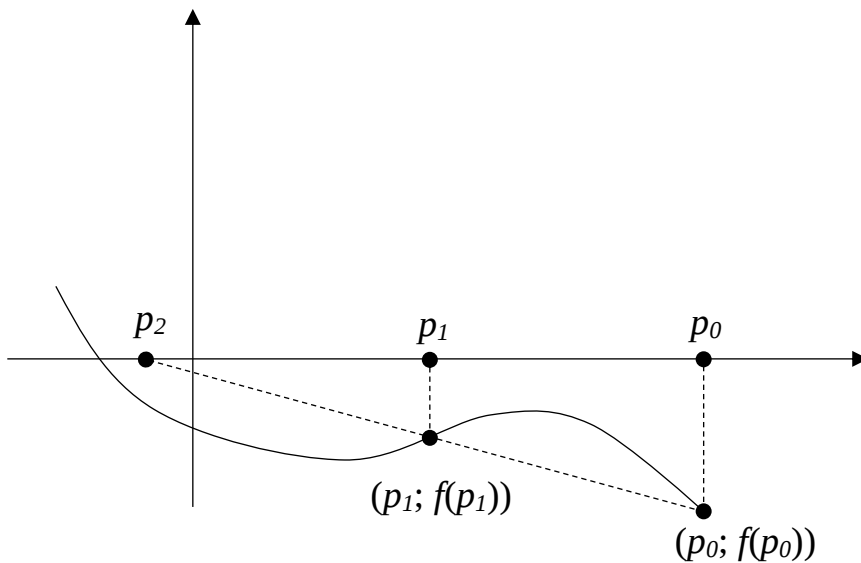
Недоліком методу Ньютона є те, що на кожній ітерації треба обчислювати не тільки $f(x)$, а й $f'(x)$. Обчислення похідної може бути складнішим від обчислення $f(x)$. У таких випадках $f'(x)$ замінюють її наближеним значенням

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

підставимо $f'(x_k)$ в формулу методу ітерацій отримуємо формулу методу січних

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Алгоритм методу січних починається із задання двох початкових наближень p_0 і p_1 , які вибирають на відрізку ізоляції кореня x^* . Тому складність цього методу полягає в знаходженні таких p_0 і p_1 досить близьких до x^* щоб метод був збіжним.



Визначимо p_2 як абсцису точки перетину лінії, що проходить через дві точки, і осі Ox . Тоді, як видно з рисунку, p_2 буде ближче до p ніж будь-яка з двох точок p_0 чи p_1 . Рівняння, яке пов'язує p_2 , p_1 , p_0 знаходимо, розглядаючи тангенс кута нахилу

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}$$

$$m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

Прирівнюємо ці два вирази

$$\frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} = \frac{-f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{-f(p_1) \cdot (p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1) \cdot (p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)}$$

отримуємо ітераційну формулу

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k) \cdot (p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

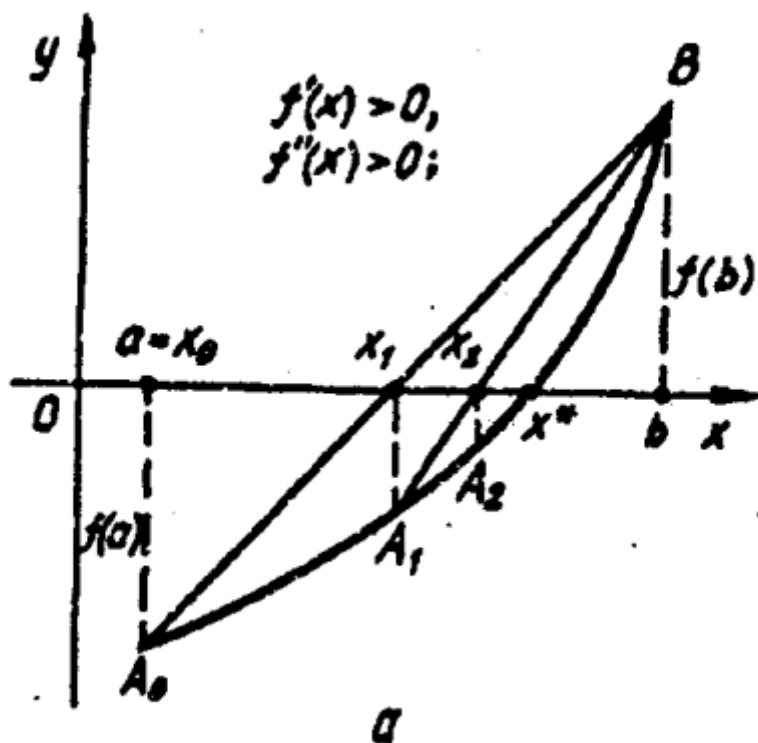
Метод хорд

Метод - один з найпоширеніших ітераційних методів. Його називають методом лінійного інтерполювання, методом пропорційних частин.

Нехай задано рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має неперервні похідні першого і другого порядку, які зберігають сталі знаки на цьому відрізку, $f(a)f(b)<0$, тобто корінь x^* відокремлений на $[a;b]$.

Ідея методу хорд полягає в тому, що на досить малому відрізку дуга кривої $y=f(x)$ замінюється хордою і абсциса точки перетину хорди з віссю Ox є наближеним значенням кореня.

Нехай для визначеності $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $f(a)<0$, $f(b)>0$.



Візьмемо за початкове наближення шуканого кореня x^* значення $x_0 = a$. Через точки A_0 і B проведемо хорду і за перше наближення кореня x^* візьмемо абсцису x_1 точки перетину хорди з віссю Ox . Тепер наближене значення кореня x_1 можна уточнити, якщо застосувати метод хорд до відрізка $[x_1; b]$. Абсциса x_2 точки перетину хорди A_1B буде другим наближенням кореня. Продовжуючи цей процес необмежено, дістанемо послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ наближених значень кореня x^* даного рівняння.

Для виведення формули методу хорд запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $A_k(x_k, f(x_k))$ і $B(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} = \frac{x - x_k}{b - x_k}.$$

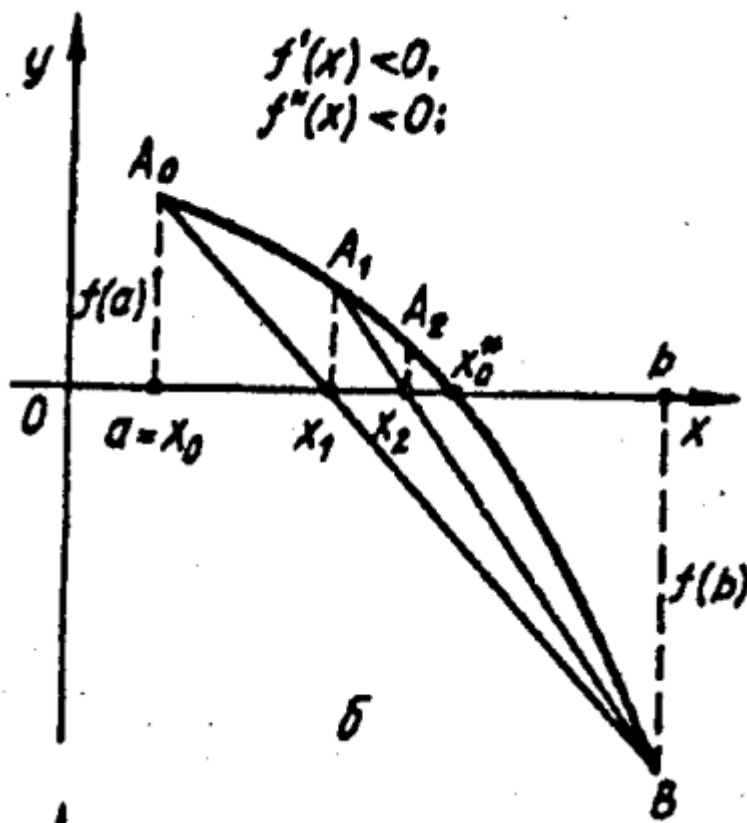
Поклавши $y = 0$, запишемо абсцису точки перетину хорди $A_k B$ з віссю Ox :

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k).$$

Значення x можна взяти за наступне наближення, тобто

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k)$$

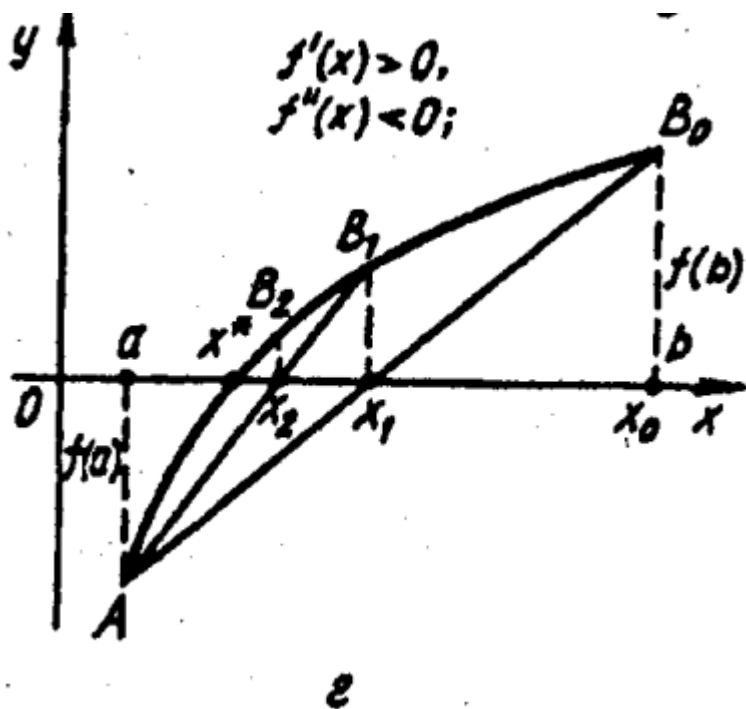
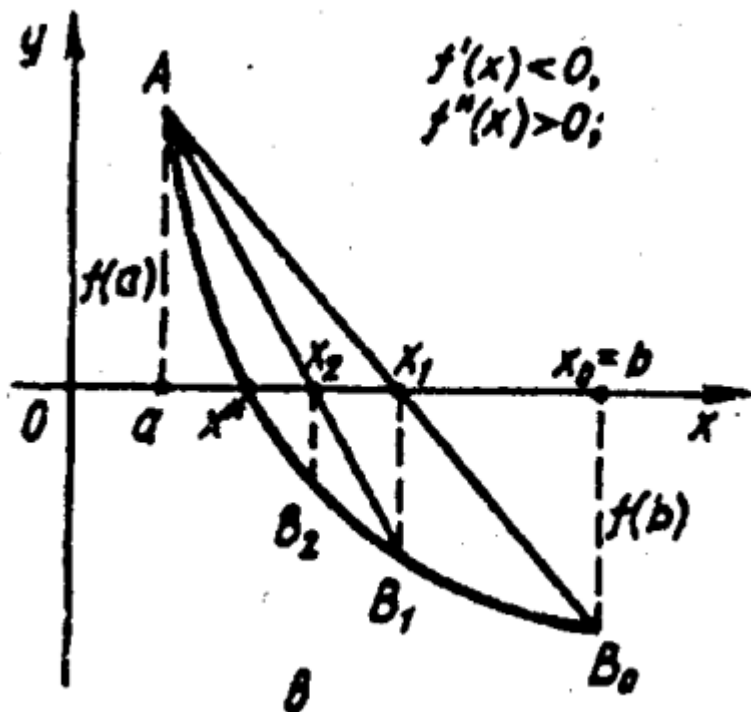
У цьому разі і тоді, коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (рис. б) кінець b відрізка $[a; b]$ є нерухомим.



Якщо $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (рис. в) або $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ (рис. г), аналогічно можна записати формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}(x_k - a)$$

У цьому випадку точка a є нерухомим кінцем відрізка $[a; b]$.



У загальному випадку нерухомим буде той кінець відрізка ізоляції кореня, в якому знак функції $f(x)$ співпадає зі знаком другої похідної, а за початкове наближення x_0 можна взяти точку відрізка $[a;b]$, в якій $f(x_0)f''(x_0) < 0$.

Отже, метод хорд можна записати так:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(c)}(x_k - c)$$

де

$$c = \begin{cases} a, & \text{якщо } f(a)f''(a) > 0, \\ b, & \text{якщо } f(b)f''(b) > 0 \end{cases}$$

Якщо $m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, $M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, то корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ буде знайдений методом хорд із наперед заданою точністю ε , якщо для двох послідовних наближень x_{k-1} і x_k справджуватиметься нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{m_1}{M_1 - m_1} \varepsilon$$