

Затверджую  
Завідувач кафедри  
прикладної математики і  
механіки  
ЛДУ БЖД

" \_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА**  
*ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ*  
*З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ 2 КУРСУ*  
*З ДИСЦИПЛІНИ СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ*  
**ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ**

**ТЕМА: № 7. Розв'язання задачі про заміну обладнання**  
**методами динамічного програмування.**

Методична розробка обговорена на засіданні кафедри  
Протокол № \_\_\_ від \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

м. Львів

## **ТЕМА: № 7. Розв'язання задачі про заміну обладнання методами динамічного програмування**

### **Мета заняття**

**навчальна:** ознайомити студентів з основними задачами динамічного програмування; навчити знаходити розв'язок задачі про заміну обладнання методами динамічного програмування.

**виховна:** виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.

**розвиткова:** розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

**Навчальний час:** 2 години.

**Місце проведення:** згідно з розкладом.

**Забезпечення заняття:** ПК, МП.

### **Література:**

1. *Махней О.В., Гой Т.П.* (2013). Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 304.

### **Структурні елементи заняття**

- організаційно-вступна частина;
- вивчення нового матеріалу з одночасним виконанням прикладів на ПК;
- закріплення нового матеріалу;
- видача завдання для самостійного виконання.

Розробила:

доцент кафедри прикладної математики і механіки,  
к. ф.-м. наук

Оксана Чмир

### Задача про заміну обладнання.

Нехай потрібно визначити оптимальну політику заміни обладнання на наступні  $n$  років. На початку кожного року приймається рішення про заміну обладнання або експлуатацію його протягом наступного року.

Позначимо:

$r(t)$  – прибуток від експлуатації  $t$ -літнього обладнання,

$c(t)$  – витрати на обслуговування  $t$ -літнього обладнання протягом року,

$s(t)$  – залишкова вартість обладнання (вартість від продажу обладнання, яке експлуатувалося  $t$  років),

$I$  – вартість нового обладнання, яка залишається незмінною.

Елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином:

1. Етап  $i$  відповідає порядковому номеру року ( $i = \overline{1, n}$ ).
2. Альтернативами на  $i$ -му етапі є рішеннями про продовження експлуатації або заміну обладнання.
3. Стан на  $i$ -му етапі – це вік обладнання на початку  $i$ -го року.

Нехай  $f_i(t)$  – максимальний прибуток, що отримується за роки від  $i$  до  $n$  при умові, що на початку  $i$ -го року маємо  $t$ -літнє обладнання. Рекурентне співвідношення матиме вигляд:

$$f_i(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) + f_{i+1}(t+1) - c(t), \text{ якщо експлуатуємо} \\ r(0) + s(t) + f_{i+1}(1) - c(0) - I, \text{ якщо заміняємо} \end{array} \right\},$$

де  $f_{n+1}(\bullet) \equiv 0$ .

**Приклад 1.** Мікроавтобус експлуатується протягом 1 року. Компанія планує визначити оптимальну політику заміни мікроавтобуса протягом наступних 4 років. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну мікроавтобуса новим. Вартість нової машини вважається незмінною і складає 9500 у.о. Компанія вимагає обов'язкової заміни мікроавтобуса, що знаходиться в експлуатації протягом 3-х років. Визначити оптимальний план заміни мікроавтобуса.

Термін експлуатації $t$	Прибуток $r(t)$ , у.о.	Витрати на обслуговування $c(t)$ , у.о.	Залишкова вартість $s(t)$ , у.о.
0	2500	750	
1	2200	825	6800
2	1960	910	5840
3	1770	990	5070

**Розв'язання.** Для визначення допустимих значень віку мікроавтобуса побудуємо граф станів (рис. 1).

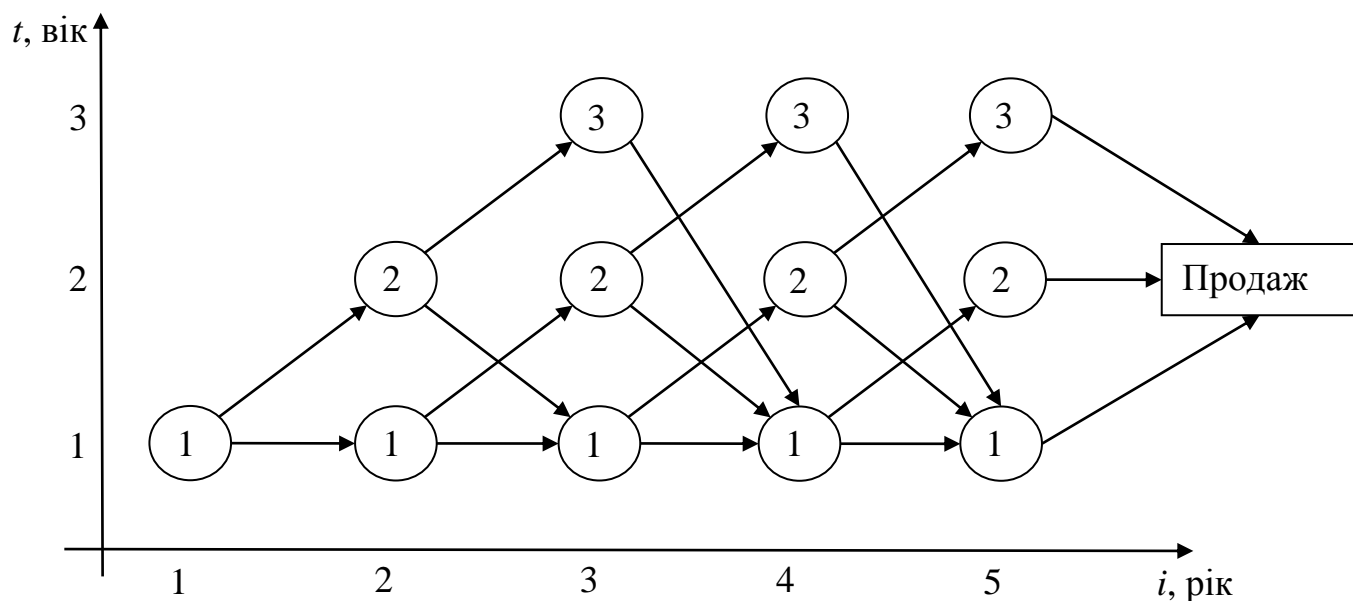


Рис. 1.

На початку першого року маємо мікроавтобус, який знаходиться в експлуатації один рік. Ми можемо замінити (З) його або продовжити експлуатацію (Е) на наступний рік. Якщо мікроавтобус замінили, то на початку другого року йому буде один рік, інакше його вік буде 2 роки. Такий підхід використовуємо на початку кожного року. Розв'язання задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (тобто такого, який приносить максимальний прибуток) від початку першого до кінця четвертого в мережі. При розв'язанні цієї задачі використовуємо табличну форму запису.

Етап 4.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	Рішення
1	$2200+5840-825=7215$	$2500+6800+6800-750-9500=5850$	7215	Е
2	$1960+5070-910=6120$	$2500+5840+6800-750-9500=4890$	6120	Е
3	–	$2500+5070+6800-750-9500=4120$	4120	З

Етап 3.

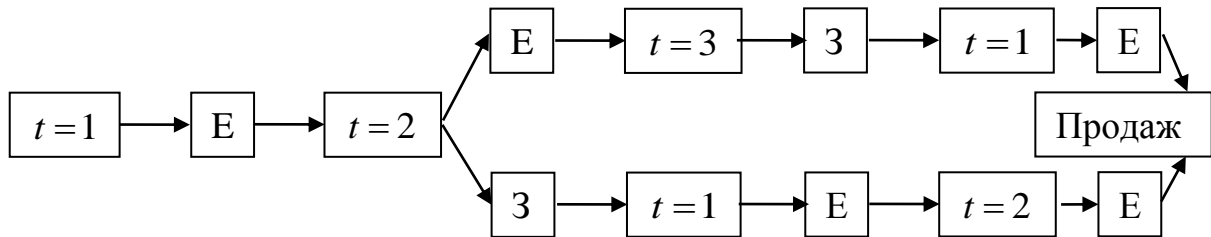
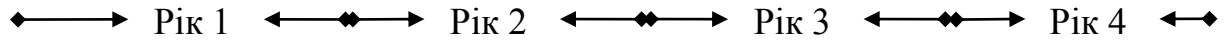
$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + f_4(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_4(1) - c(0) - I$	$f_3(t)$	Рішення
1	$2200+6120-825=7495$	$2500+6800+7215-750-9500=6265$	7495	Е
2	$1960+4120-910=5170$	$2500+5840+7215-750-9500=5305$	5305	З
3	–	$2500+5070+7215-750-9500=4535$	4535	З

Етап 2.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + f_3(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_3(1) - c(0) - I$	$f_2(t)$	Рішення
1	$2200+5305-825=6680$	$2500+6800+7495-750-9500=6545$	6680	Е
2	$1960+4535-910=5585$	$2500+5840+7495-750-9500=5585$	5585	Е або З

Етап 1.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + f_2(t + 1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_2(1) - c(0) - I$	$f_1(t)$	Рішення
1	2200+5585-825=6960	2500+6800+6680-750-9500=5730	6960	Е

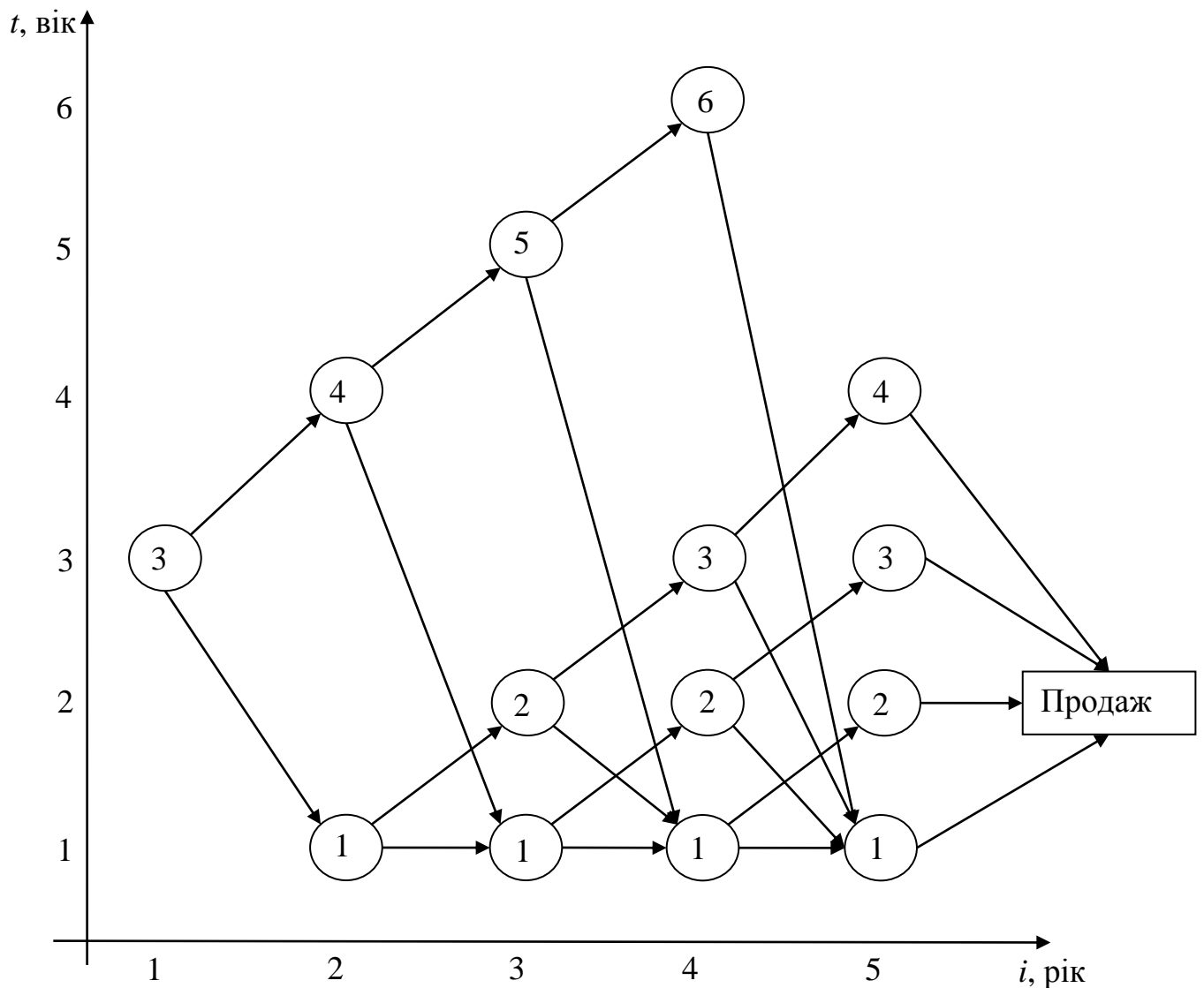


Отже, починаючи з першого року експлуатації мікроавтобуса, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни мікроавтобуса будуть (Е, Е, З, Е) і (Е, З, Е, Е). Загальний прибуток складатиме 6960 у.о.

**Приклад 2.** Компанія планує визначити оптимальну політику заміни використаного на теперішній час трьохлітнього механізму протягом наступних чотирьох років, тобто аж до початку п'ятого року. Наведена таблиця містить дані, які відносяться до задачі. Компанія вимагає обов'язкової заміни механізму, що знаходиться в експлуатації шість років. Вартість нового механізму вважається незмінною і складає 100 000 у. о. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну механізму новим. Визначити оптимальний план заміни механізму.

Термін експлуатації $t$	Прибуток $r(t)$ , у.о.	Витрати на обслуговування $c(t)$ , у.о.	Залишкова вартість $s(t)$ , у.о.
0	20 000	200	
1	19 000	600	80 000
2	18 500	1200	60 000
3	17 200	1500	50 000
4	15 500	1700	30 000
5	14 000	1800	10 000
6	12 200	2200	5 000

**Розв'язання.** Для визначення допустимих значень віку механізму побудуємо граф станів (рис. 2).



**Рис. 2.**

На початку першого року маємо механізм, який знаходиться в експлуатації три роки. Ми можемо замінити (З) його або продовжити експлуатацію (Е) на наступний рік. Якщо механізм замінили, то на початку другого року йому буде один рік, інакше його вік буде 4 роки. Такий підхід використовуємо на початку кожного року, починаючи з другого по четвертий.

Якщо однолітній механізм заміняється на початку другого або третього років, то новий механізм на початку наступного року також буде однолітнім. До того ж, на початку четвертого року шестилітній механізм обов'язково потрібно замінити, якщо він ще експлуатується. В кінці четвертого року всі механізми продаються в обов'язковому порядку. На схемі мережі також видно, що на початку другого року можливі тільки механізми із терміном експлуатації один або чотири роки. На початку третього року механізм може мати вік один, два або п'ять років, а на початку четвертого – один, два, три або шість років.

Розв'язання задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (тобто такого, який приносить максимальний прибуток) від початку першого до кінця четвертого в мережі. При розв'язанні цієї задачі

використовуємо табличну форму запису. (Числові дані таблиці кратні тисячам ум. од.)

Етап 4.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	Рішення
1	$19+60-0,6=78,4$	$20+80+80-0,2-100=79,8$	79,8	З
2	$18,5+50-1,2=67,3$	$20+60+80-0,2-100=59,8$	67,3	Е
3	$17,2+30-1,5=45,7$	$20+50+80-0,2-100=49,8$	49,8	З
6		$20+5+80-0,2-100=4,8$	4,8	З

Етап 3.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + f_4(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_4(1) - c(0) - I$	$f_3(t)$	Рішення
1	$19+67,3-0,6=85,7$	$20+80+79,8-0,2-100=79,6$	85,7	Е
2	$18,5+49,8-1,2=67,1$	$20+60+79,8-0,2-100=59,6$	67,1	Е
5	$14+4,8-1,8=17$	$20+10+79,8-0,2-100=9,6$	17	Е

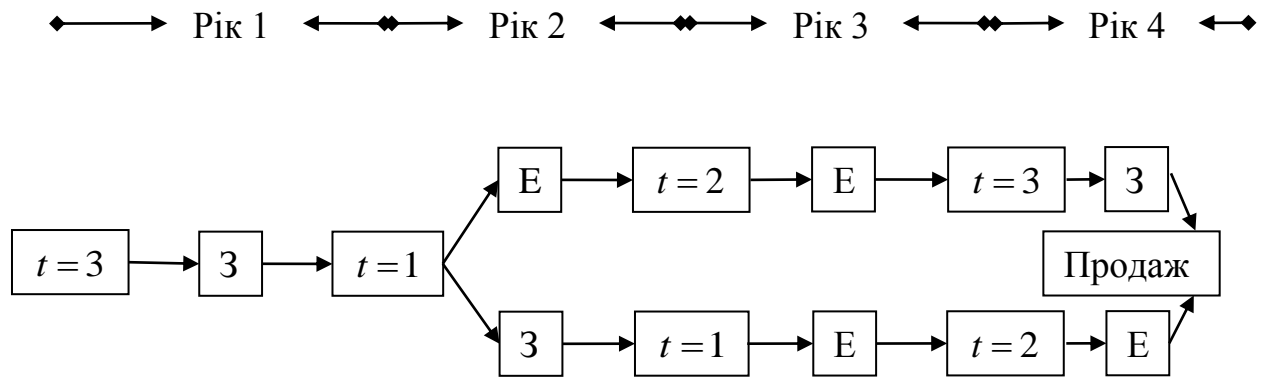
Етап 2.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + f_3(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_3(1) - c(0) - I$	$f_2(t)$	Рішення
1	$19+67,1-0,6=85,5$	$20+80+85,7-0,2-100=85,5$	85,5	Е або З
4	$15,5+17-1,7=30,8$	$20+30+85,7-0,2-100=35,5$	35,5	З

Етап 1.

$t$	Експлуатація (Е)	Заміна (З)	Оптимум	
	$r(t) + f_2(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_2(1) - c(0) - I$	$f_1(t)$	Рішення
3	$17,2+35,5-1,5=51,2$	$20+50+85,5-0,2-100=55,3$	55,3	З

Отже, на початку першого року оптимальним рішенням при  $t = 3$  є заміна механізму. Тоді новий механізм до початку другого року буде експлуатуватись один рік. При  $t = 1$  на початку другого року оптимальним рішенням буде або експлуатація, або заміна механізму. Якщо механізм замінюється, то новий до початку третього року буде знаходитись в експлуатації 1 рік. В іншому випадку, механізм буде мати вік 2 роки. Описаний процес продовжується до тих пір, поки не буде визначено оптимальне рішення для четвертого року.



Отже, починаючи з першого року експлуатації механізму, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни механізму будуть (3, E, E, 3) і (3, 3, E, E). Загальний прибуток складатиме 55 300 у.о.

### Завдання для самостійного виконання.

- Мікроавтобус експлуатується протягом 1 року. Компанія планує визначити оптимальну політику заміни мікроавтобуса протягом наступних 4 років. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну мікроавтобуса новим. Вартість нової машини вважається незмінною і складає 10000 у.о. Компанія вимагає обов'язкової заміни мікроавтобуса, що знаходиться в експлуатації протягом 3-х років. Визначити оптимальний план заміни мікроавтобуса.

Термін експлуатації $t$	Прибуток $r(t)$ , у.о.	Витрати на обслуговування $c(t)$ , у.о.	Залишкова вартість $s(t)$ , у.о.
0	3000	800	
1	2700	875	6900
2	2460	960	5940
3	2270	1400	5170

- Мікроавтобус експлуатується протягом двох років. Компанія планує визначити оптимальну політику заміни мікроавтобуса протягом наступних 5 років. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну мікроавтобуса новим. Вартість нової машини вважається незмінною і складає 7000 у.о. Після  $t$  років експлуатації мікроавтобус можна продати за  $s(t)$  у.о. Вартість обслуговування  $t$ -літнього мікроавтобуса складає  $c(t)$  у.о. Прибуток від експлуатації  $t$ -літнього мікроавтобуса становить  $r(t)$ . Компанія вимагає обов'язкової заміни мікроавтобуса, що знаходиться в експлуатації протягом 5-ти років. Визначити оптимальний план заміни мікроавтобуса.



Термін експлуатації $t$	Прибуток $r(t)$ , у.о.	Витрати на обслуговування $c(t)$ , у.о.	Залишкова вартість $s(t)$ , у.о.
0	1900	650	
1	1200	820	4800
2	960	900	3840
3	860	1000	3070
4	810	1050	2450
5	500	1200	1960