

2

Числові обчислення

2.1 Введення виразів

Розглянемо введення виразів у Maple, можливість зміни точності представлення чисел, наведемо списки операцій, математичних констант та функцій, покажемо вправність Maple при обчисленні числових виразів.

Будь-які введені вирази в Maple повинні закінчуватися символом `:` або `;`. У першому випадку результат не буде виводитися на екран, у другому — буде.

Наприклад,¹

```
> x:=0.3*(2/7):
```

```
> x:=0.3*(2/7);
```

$x := .08571428571$

Для того, щоб округлити вираз, одержаний в символьному вигляді з плаваючою комою, слід використати команду `evalf`.

Наприклад.

```
> f:=16/3;
```

$$f := \frac{16}{3}$$

¹У Maple в десятковому дробі ціла частина відділяється від дробової крапкою, не комою!

```
> evalf(f);
```

```
5.333333333
```

Змінювати точність представлення чисел можна за допомогою глобальної змінної `Digits`.

Наприклад.

Роздрукуємо число π з точністю до 50 знаків:

```
> Digits:=50;
```

```
Digits := 50
```

```
> evalf(Pi);
```

```
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
```

2.2 Список операцій. Математичні константи. Стандартні математичні функції

Список операцій Maple наведено в табл. 2.1.

У таблиці 2.2 виписані основні математичні константи ПСО Maple.

Таблиця 2.3 містить назви стандартних математичних функцій Maple.

Проілюструємо виконання найпростіших операцій за допомогою Maple.

Приклад 2.1. Знайти суму чисел 2,5 і 4,9.

```
> 2.5+4.9;
```

```
7.4
```

Приклад 2.2. Знайти різницю чисел 3,625 і 8,9987.

```
> 3.675-8.9987;
```

```
-5.3137
```

Приклад 2.3. Знайти добуток чисел 5,7866 і -4,8776.

```
> 5.7866*(-4.8776);
```

```
-28.22472016
```

Табл. 2.1. Список операцій

> a+b	додавання
> a-b	віднімання
> a*b	множення
> a/b	частка
> a^b	піднесення до степеня
> a**b	піднесення до степеня
> n!	факторіал
> iquo(a,b)	частка
> irem(a,b)	остача
> isqrt(n)	квадратний корінь (цілочисельне наближення)
> igcd(a,b)	найбільший спільний дільник
> ilcm (a,b)	наменшие спільне кратне
> signum(n)	знак числа
> abs(n)	абсолютне значення числа
> max(a,b)	максимум
> min (a,b)	мінімум

Приклад 2.4. Знайти частку чисел -35 і 7.

> -35/7;

-5

Приклад 2.5. Піднести 3,56 до кубу.

> 3.56^3;

45.118016

Приклад 2.6. Піднести 3,56 до кубу.

> 3.56**3;

45.118016

Приклад 2.7. Обчислити 5!.

```
> 5!;
```

120

Приклад 2.8. Вибрати менше з чисел 33 та 5.

```
> min(33,5);
```

5

Табл. 2.2. Математичні константи

> Pi	число π
> e	число Ейлера, або число Непера (основа натурального логарифма)
> I	уявна одиниця (квадратний корінь з -1)
> infinity	нескінченність
> true	істинно
> false	хибно

Приклад 2.9. Знайти цілу частину частки від ділення 45 на 4.

```
> iquo(45,4);
```

11

Приклад 2.10. Знайти остачу від ділення 40 на 7.

```
> irem(40,7);
```

5

Приклад 2.11. Знайти цілочисельне наближення кореня квадратного з 50.

```
> isqrt(50);
```

7

Приклад 2.12. Знайти найбільший спільний дільник чисел 18 і 12.

```
> igcd(18,12);
```

6

Приклад 2.13. Знайти найменше спільне кратне чисел 24 і 56.

```
> ilcm(24,56);
```

168

Приклад 2.14. Визначити знак числа 25.

```
> signum(25);
```

1

(тобто, число позитивне).

Табл. 2.3. Стандартні математичні функції

Maple	Математичний запис
> exp(x)	e^x
> ln(x) або log(x)	$\ln x$
> log10(x)	$\lg x$
> log[a](x)	$\log_a x$
> sqrt(x)	$\sqrt{x}$
> abs(x)	$ x $
> signum(x)	$\text{signum } x$
> n!	$n!$
> sin(x)	$\sin x$
> cos(x)	$\cos x$
> tan(x)	$\text{tg } x$
> cot(x)	$\text{ctg } x$
> sec(x)	$\sec x$
> csc(x)	$\text{cosec } x$
> arcsin(x)	$\arcsin x$
> arccos(x)	$\arccos x$
> arctan(x)	$\text{arctg } x$
> arccot(x)	$\text{arcctg } x$
> round(x)	округлення до цілого

Приклад 2.15. Визначити знак числа -25 .

```
> signum(-25);
```

-1

(тобто, число негативне)

Приклад 2.16. Знайти модуль $-543,67$.

```
> abs(-543.67);
```

543.67

Приклад 2.17. Знайти модуль $543,67$.

```
> abs(543.67);
```

543.67

Приклад 2.18. Вибрати більше з чисел 45 та 65 .

```
> max(45,65);
```

65

Приклад 2.19. Задати вираз e^3 .

```
> exp(3);
```

e^3

Приклад 2.20. Знайти наближене значення e^3 .

```
> exp(3.);
```

20.08553692

Приклад 2.21. Обчислити $\arccos(\cos(2 \operatorname{arccotg}(\sqrt{2}-1)))$.

```
> arccos(cos(2*arccot(sqrt(2)-1)));
```

$\frac{3}{4}\pi$

Команда `convert`

Для перетворення виразу одного типу в інший тип слугує команда `convert`.

Приклад 2.22. Перетворити число $2,356$ у дріб типу $\frac{a}{b}$.

```
> convert(2.356,fraction);  
589  
250
```

Приклад 2.23. Виконати протилежне перетворення.

```
> convert(589/250,float);  
2.356
```

Приклад 2.24. Перейти від запису числа 25, що записане у десятковій системі числення, до його запису у двійковій системі числення.

```
> convert(25,binary);  
11001
```

Приклад 2.25. Проробити аналогічне з числом $-25,345$.

```
> convert(-25.345,binary);  
-11001.01011
```

Приклад 2.26. Перейти від двійкової форми запису числа 11001 до десяткової.

```
> convert(11001,decimal,binary);  
25
```

Для переведення градусної міри кута в радіанну і радіанної в градусну також використовують команду `convert`.

Приклад 2.27. Подати кут $\frac{\pi}{6}$ радіан у градусній мірі.

```
> convert(Pi/6,degrees);  
30 degrees
```

Приклад 2.28. Подати кут 45° у радіанній мірі.

```
> convert(45*degrees,radians);  
1  
4  $\pi$ 
```

Приклад 2.29. Знайти наближене значення $\sin 37^\circ$.

```
> sin(convert(37*degrees,radians));
      sin  $\left(\frac{37}{180} \pi\right)$ 
> evalf(%);
      .6018150234
```

Приклад 2.30. Обчислити:

$$\frac{(7 - 6,35) : 6,5 + 9,9}{(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1\frac{5}{16}) : \frac{169}{24}} \cdot$$

```
> ((7-6.35)/6.5+9.9)/((1.2/36+1.2/0.25-21/16)/
(169/24));
      20.00000000
> convert(20.0000000,fraction);
      20
```

2.3 Завдання для самостійного виконання

1. Використовуючи глобальну змінну Digits, роздрукувати число e з точністю до 30 знаків.
2. Перетворити число 12,656 у дріб типу $\frac{a}{b}$.
3. Перейти від запису числа 15, що записане у десятковій системі числення, до його запису у двійковій системі числення.
4. Перейти від двійкової форми запису числа 110110 до десяткової.
5. Подати кут $\frac{\pi}{3}$ радіан у градусній мірі.
6. Подати кут 135° у радіанній мірі.
7. Знайти наближене значення $\sin 49^\circ$.

8. Обчислити:

$$1) \left(\frac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}} \cdot 5,2 \right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125} + 5,7 \right);$$

$$2) \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5};$$

$$3) \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \arcsin \left(-\frac{4}{5} \right) \right);$$

$$4) -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}.$$

3

Операції з формулами

3.1 Спрощення математичних виразів

Проілюструємо можливості **Maple** при роботі з формулами, наведемо список команд спрощення математичних виразів та покажемо їх застосування при розв'язуванні вправ.

Для спрощення математичних виразів **Maple** володіє широкими можливостями. Імена команд для проведення математичних перетворень прості і відповідають англійським термінам: факторизація — **factor**, розкриття дужок — **expand**, спрощення виразу — **simplify**, підстановка — **subs** і т. д.

Табл. 3.1. Команди спрощення

Звертання	Призначення
> collect(EX,VAR)	зведення подібних доданків
> combine(EX,VAR)	об'єднання членів
> expand(EX)	розкриття дужок
> factor(EX)	розклад виразу на множники
> normal(RAT)	нормалізація дробу
> simplify(EX,OPT)	спрощення виразу

У командах спрощення використані наступні позначення: EX — вираз; VAR — змінна; RAT — раціональний дріб; OPT — до-

даткові умови.

Розклад виразу EX на множники виконує команда `factor(EX)`.

Приклад 3.1. Розкласти на множники поліном

$$f(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 6.$$

```
> f:=x^6-4*x^4+x^2+6;
```

$$f := x^6 - 4x^4 + x^2 + 6$$

```
> factor(f);
```

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 + 1)$$

Знову звернемося до команди `> factor`, вказавши список допустимих при запису відповіді радикалів.

Приклад 3.2. Розкласти на множники поліном

$$f(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 6.$$

```
> f=factor(f,[sqrt(2),sqrt(3)]);
```

$$x^6 - 4x^4 + x^2 + 6 = (x^2 + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Команда `factor` забезпечує також скорочення спільних множників чисельника і знаменника алгебраїчного дробу.

Приклад 3.3. Скоротити дріб

$$\frac{x^9 - 1}{x - 1}.$$

```
> f:=(x^9-1)/(x-1);f=factor(f);
```

$$f := \frac{x^9 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{x^9 - 1}{x - 1} = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

Приклад 3.4. Спростити вираз

$$\frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^2 + 2p + 6} : \frac{p^3 - p^2 + 2p + 16}{p^3 - 3p^2 + 8p}.$$

```

> f:=((p^3+4*p^2+10*p+12)/p^2+2*p+6))/
((p^3-p^2+2*p+16)/(p^3-3*p^2+8*p));
      f := \frac{(p^3 + 4p^2 + 10p + 12)(p^3 - 3p^2 + 8p)}{(p^2 + 2p + 6)(p^3 - p^2 + 2p + 16)}
> f:=factor(f);
      f := p

```

Команда `simplify` здійснює спрощення виразу.

Приклад 3.5. Спростити вираз

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}.$$

```

> B:=((sin(x))^4+((cos(x))^4-1))/
((sin(x))^6+((cos(x))^6-1));
      B := \frac{\sin(x)^4 + \cos(x)^4 - 1}{\sin(x)^6 + \cos(x)^6 - 1}
> simplify(B);
      \frac{2}{3}

```

Приклад 3.6. Спростити вираз

$$16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x - \sin 5x.$$

```

> C:=16*(sin(x))^5-20*(sin(x))^3+5*(sin(x))
-sin(5*x);
      C := 16 \sin(x)^5 - 20 \sin(x)^3 + 5 \sin(x) - \sin(5x)
> simplify(C);
      0

```

Приклад 3.7. Спростити вираз

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}.$$

```

> sqrt(25^(1/log[6](5))+49^(1/log[8](7)));
      \sqrt{25^{\left(\frac{\ln(6)}{\ln(5)}\right)} + 49^{\left(\frac{\ln(8)}{\ln(7)}\right)}}
> simplify(%);

```

10

Для скорочення спільних множників чисельника і знаменника дробу та зведення суми алгебраїчних дробів до спільного знаменника слугує команда нормалізації дробу: `> normal (RAT)`.

Приклад 3.8. Спростити вираз

$$\frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - 2(x+2)^3(x-3)}{(x-3)^4}.$$

```
> f:=(3*(x+2)^2*(x-3)^2-(x+2)^3*2*(x-3))/(x-3)^4;
```

$$f := \frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - 2(x+2)^3(x-3)}{(x-3)^4}$$

```
> normal(f);
```

$$\frac{(x+2)^2(x-13)}{(x-3)^3}$$

Для поліноміальних виразів EX команда `expand(EX)` розкриває дужки, а дробово-раціональні вирази подає у вигляді суми дробів.

Приклад 3.9. Спростити вираз

$$-3x^2(x^4 + 2x^3 - 4) + 4x(4x^2 + 5x - 8) - (x^2 + 5)(x - 3).$$

```
> f:=-3*x^2*(x^4+2*x^3-4)+4*x*(4*x^2+5*x-8)-(x^2+5)*(x-3);
```

$$f := -3x^2(x^4 + 2x^3 - 4) + 4x(4x^2 + 5x - 8) - (x^2 + 5)(x - 3)$$

```
> f:=expand(f);
```

$$f := -3x^6 - 6x^5 + 35x^2 + 15x^3 - 37x + 15$$

Приклад 3.10. Подати дріб у вигляді суми дробів

$$\frac{x+2}{x+1}.$$

```
> f:=(x+2)/(x+1);
```

$$f := \frac{x+2}{x+1}$$

> f:=expand(f);

$$f := \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$$

Maple автоматично спрощує складні радикали.

Приклад 3.11. Спростити складний радикал

$$A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$$

> A:=2*sqrt(3+sqrt(5-sqrt(13+sqrt(48))));

$$A := \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Для спрощення виразів, що містять не тільки квадратні корені, а й корені інших степенів використовується команда `radnormal`.

Приклад 3.12. Спростити вираз

$$A = \frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54} + 15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}}$$

> A:=(7*(54)^(1/3)+15*(128)^(1/3))^(1/4)/
((4*(32)^(1/4))^(1/3)+(9*(162)^(1/4))^(1/3));

$$A := \frac{(7 \cdot 54^{(1/3)} + 15 \cdot 128^{(1/3)})^{(1/4)}}{4^{(1/3)} 32^{(1/12)} + 9^{(1/3)} 162^{(1/12)}}$$

> A:=radnormal((7*(54)^(1/3)+15*(128)^(1/3))^(1/4)/
((4*(32)^(1/4))^(1/3)+(9*(162)^(1/4))^(1/3)));

$$A := \frac{3}{5}$$

3.2 Завдання для самостійного виконання

1. Розкласти на множники вирази:

1) $x^8 - 16$;

2) $x^2(y - x) + y^2(z - x) + (x - y)$;

3) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

2. Спростити вирази:

1) $\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2}$;

2) $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$,

4) $\frac{1-\log_5^3 7}{(\log_5 7+\log_7 5+1)\log_5 \frac{5}{7}}$.

3. Подати дріб $\frac{x^2}{x^3-3x+2}$ у вигляді суми елементарних дробів.

4. Спростити складний радикал $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.