

11

Побудова графіків 3D

При підключенні до бібліотеки `plots`, тобто після виконання команди `with(plots)`, Maple досить просто виконує побудову тривимірних графіків, спроможний виконувати побудову декількох графіків в одній і тій же системі координат.

Побудуємо декілька поверхонь другого порядку.

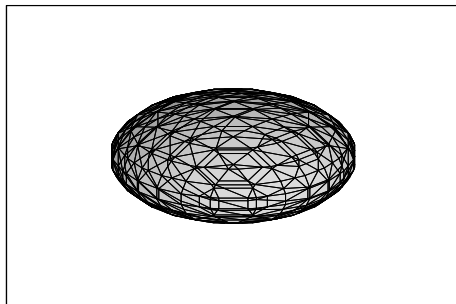
Приклад 11.1. Побудувати еліптичний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

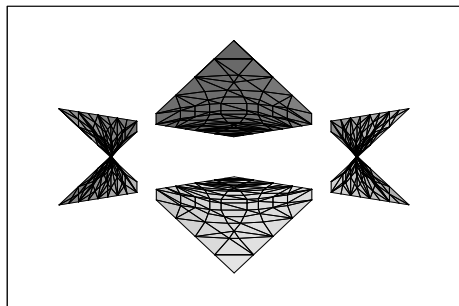
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9+z^2/16=1, x=-2..2,  
y=-3..3, z=-4..4);
```



Приклад 11.2. Побудувати гіперболічний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

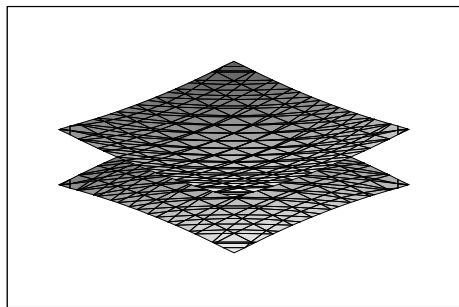
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9-z^2/16=1, x=-2..2,
y=-3..3, z=4..4);
```



Приклад 11.3. Побудувати двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

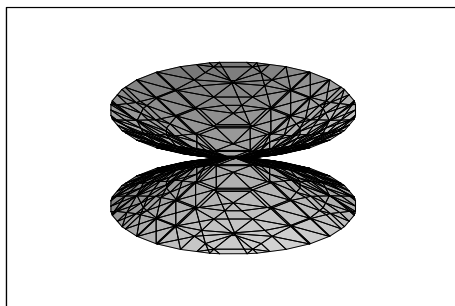
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9-z^2/16=-1,
x=-2..2, y=-3..3, z=-12..12);
```



Приклад 11.4. Побудувати конус $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

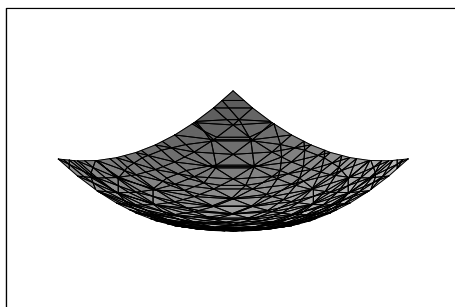
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9-z^2/16=0, x=-2..2,
y=-3..3, z=-4..4);
```



Приклад 11.5. Побудувати еліптичний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

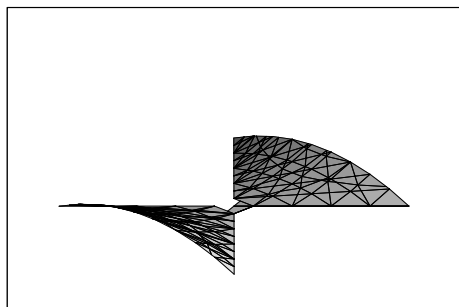
```
> implicitplot3d( z=x^2/4+y^2/9, x=-2..2, y=-3..3,
z=0..4);
```



Приклад 11.6. Побудувати гіперболічний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

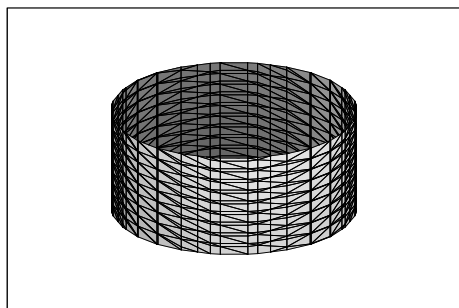
```
> implicitplot3d( z=x^2/4-y^2/9, x=-2..2, y=-3..3,
z=0..4);
```



Приклад 11.7. Побудувати еліптичний циліндр $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

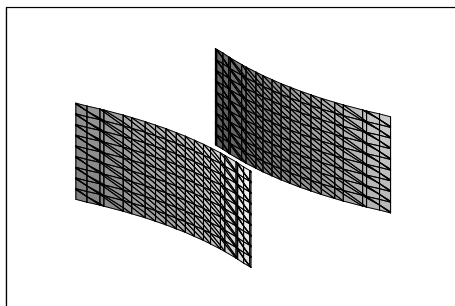
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9=1, x=-2..2, y=-3..3,
z=-4..4);
```



Приклад 11.8. Побудувати гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

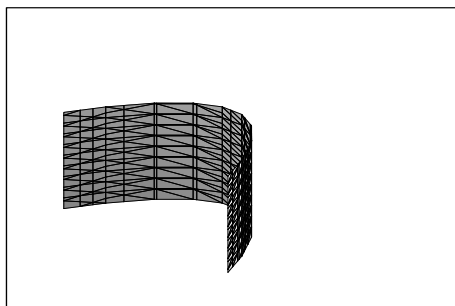
```
> implicitplot3d( x^2/4-y^2/9=1, x=-3..3, y=-2..2,
z=-4..4);
```



Приклад 11.9. Побудувати параболічний циліндр $y^2 = 4x$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

```
> implicitplot3d( y^2=4*x, x=-2..2, y=-3..3,
z=-4..4);
```



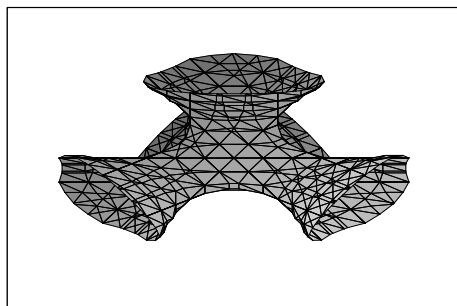
Приклад 11.10. Побудувати поверхню $x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$, якщо $x \in [-2; 2]$, $y \in [-2; 2]$, $z \in [-2; 2]$.

Розв'язання

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

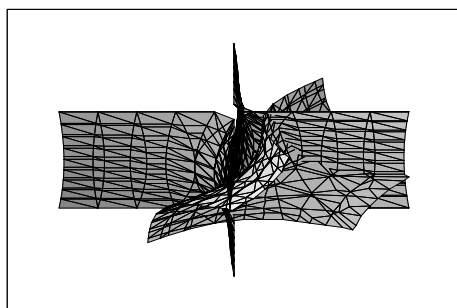
```
> implicitplot3d( x^3+y^3+z^3+1=(x+y+z+1)^3,
x=-2..2, y=-2..2,z=-2..2, grid=[13,13,13]);
```



Приклад 11.11. Побудувати поверхні $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ та $y = e^{xz}$ при $x \in [-\pi; \pi]$; $y \in [-\pi; \pi]$; $z \in [-1; 1]$.

Розв'язання

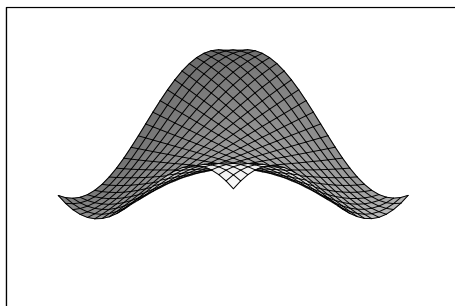
```
> implicitplot3d({x^2-y^2+z^2=1,y=exp(x*z)},
x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi,z=-1..1);
```



Приклад 11.12. Побудувати поверхню $z = \sin(xy)$, при $x \in [-1, 5; 1, 5]$, $y \in [-1, 5; 1, 5]$.

Розв'язання

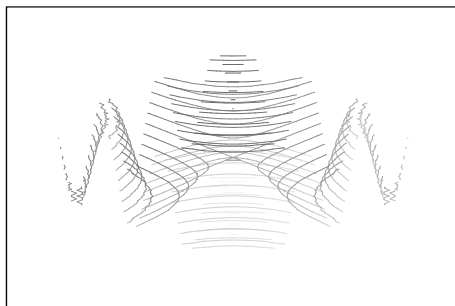
```
> plot3d(sin(x*y),x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5);
```



Приклад 11.13. Побудувати поверхню $z = \sin(xy)$, при $x \in [-\pi; \pi]$, $y \in [-\pi; \pi]$.

Розв'язання

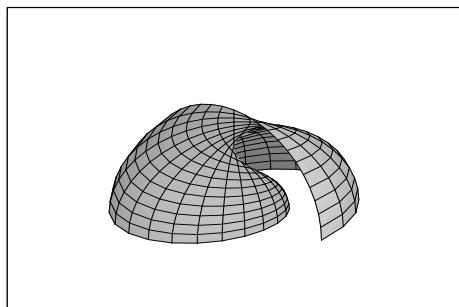
```
> plot3d(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,  
style=contour);
```



Приклад 11.14. Побудувати поверхню $z = x \sin x \cos y$, $z = x \cos x \cos y$, $z = x \sin y$ при $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; \pi]$.

Розв'язання

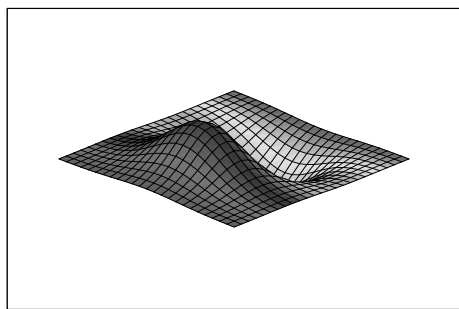
```
> plot3d([x*sin(x)*cos(y),x*cos(x)*cos(y),x*sin(y)],x  
=0..2*Pi,y=0..Pi);
```



Приклад 11.15. Побудувати поверхню $z = xe^{(-x^2-y^2)}$ при $x \in [-2; 2]$, $y \in [-2; 2]$.

Розв'язання

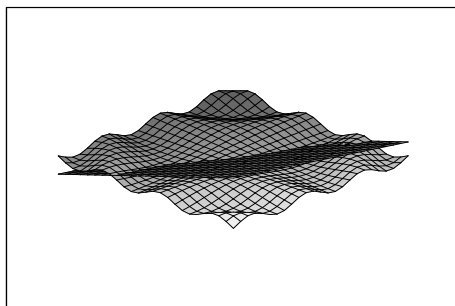
```
> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2,
color=x);
```



Приклад 11.16. Побудувати поверхні $z = \sin(xy)$, $z = x + 2y$ при $x \in [-\pi; \pi]$, $y \in [-\pi; \pi]$.

Розв'язання

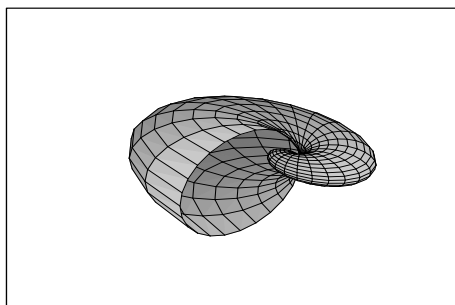
```
> plot3d({sin(x*y), x + 2*y},x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```



Приклад 11.17. Побудувати поверхню $z = 1,3^x \sin y$ при $x \in [-1; 2\pi]$, $y \in [0; \pi]$.

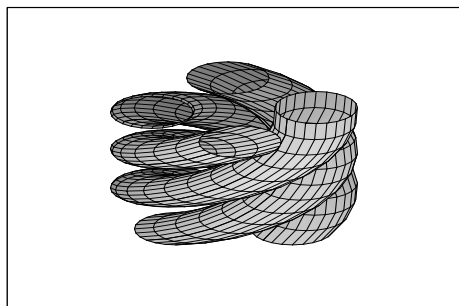
Розв'язання

```
> plot3d((1.3)^x* sin(y),x=-1..2*Pi, y=0..Pi,
coords=spherical, style=patch);
```

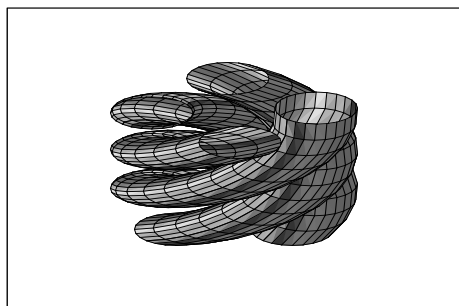


На закінчення цього розділу наведемо приклади ще трьох геометричних об'єктів:

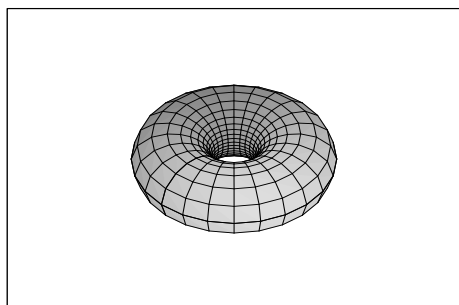
```
> c1:=[cos(x)-2*cos(0.4*y),sin(x)-2*sin(0.4*y),y]:
> c2:= [cos(x)+2*cos(0.4*y),sin(x)+2*sin(0.4*y),y]:
> c3:=[cos(x)+2*sin(0.4*y),sin(x)-2*cos(0.4*y),y]:
> c4:=[cos(x)-2*sin(0.4*y),sin(x)+2*cos(0.4*y),y]:
> plot3d({c1,c2,c3,c4},x=0..2*Pi,y=0..10,grid=[25,
15],style=patch);
```



```
> plot3d({c1,c2,c3,c4}, x=0..2*Pi,y=0..10,
grid=[25,15],style=patch, color=sin(x));
```



```
> plot3d([1,x,y],x=0..2*Pi,y=0..2*Pi,coords=
toroidal(10),scaling=constrained);
```



11.1 Побудова областей у просторі, обмежених заданими поверхнями

Області, або тіла у просторі, обмежені поверхнями, можна будувати, задаючи графіки цих поверхонь.

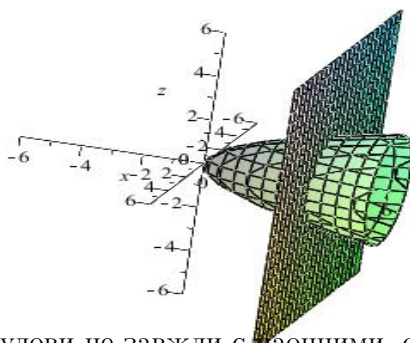
Приклад 11.18. Побудувати область, обмежену параболоїдом $y = x^2 + z^2$ і площиною $y = 4$.

Розв'язання

Будуємо поверхні за допомогою функції `implicitplot3d`:

```
> with(plots):
```

```
> implicitplot3d([x^2+z^2 = y, y = 4],  
x = -6 .. 6, y = -6 .. 6, z = -6 .. 6, axes =  
normal, view = [-6 .. 6, -6 .. 6, -6 .. 6],  
numpoints =10000);
```



Такі побудови не завжди є наочними, оскільки часто потрібні не самі поверхні, а ті контури поверхонь, що обмежують область у просторі. Побудови таких контурів можна домогтися, якщо будувати лінії перетину поверхонь, що обмежують тіло,

з координатними площинами, а також іншими поверхнями, що обмежують тіло. Це можна зробити, задаючи параметрично ці лінії перетину. Побудуємо контури, що обмежують фігуру за допомогою функції `spacecurve`, задаючи параметрично лінії перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ із координатними площинами $x = 0$, $z = 0$ та з площиною $y = 4$.

Лінія перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ з площиною $x = 0$:

```
> P1 := spacecurve([0, t^2, t], t = -2 .. 2,
color = black, thickness = 2, axes = normal):
```

Лінія перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ з площиною $y = 4$:

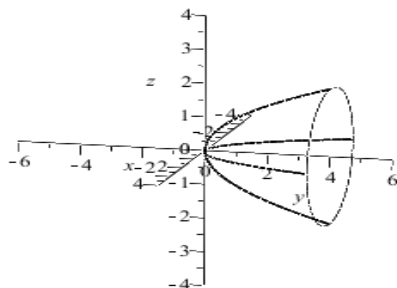
```
> P2 := spacecurve([2*cos(t), 4, 2*sin(t)],
t = 0 .. 2*Pi, color = black, axes = normal):
```

Лінія перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ з площиною $z = 0$:

```
> P3 := spacecurve([t, t^2, 0], t = -2 .. 2,
color = black, thickness = 2, axes = normal):
```

Будуємо контури поверхонь, що обмежують область у просторі:

```
> display(P1, P2, P3, view = [-4 .. 4, -6 .. 6,
-4 .. 4], orientation = [15, 75, 1], labels =
[x, y, z]);
```



11.2 Завдання для самостійного виконання

1. Використовуючи бібліотеку `plots`, побудувати поверхню:

1) $z = x^2$;

2) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$;

3) $x^2 + z^2 = 1$;

4) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$;

5) $z = y^2 - x^2$;

6) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$;

7) $x^2 + 2y^2 - 6x - y + 10$;

8) $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$;

9) $z = -\frac{3y}{x^2 + y^2 + 1}$;

10) $z = -xye^{-x^2 - y^2}$;

11) $z = \sin(|x| + |y|)$;

12) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

12

Інтеграл та його застосування

12.1 Невизначені та визначені інтеграли

За допомогою пакета символьних обчислень Maple можна знаходити як невизначені, так і визначені інтеграли, подвійні та потрійні інтеграли. Для знаходження інтегралів використовується команда `int`.

Приклад 12.1. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$ (приклад інтеграла, що обчислюється за допомогою виділення повного квадрата).

Розв'язання

> `Int((3*x-1)/(x^2-4*x+8), x);`

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$$

> `int((3*x-1)/(x^2-4*x+8), x);`

$$\frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

Приклад 12.2. Знайти інтеграл $\int (3x+7) \cos 5x dx$ (приклад інтеграла, що обчислюється за допомогою методу інтегрування частинами).