Затверджую
Завідувач кафедри
прикладної математики і
механіки
ЛДУ БЖД

"__" ____________20___ р.

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА

ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ __2__ *КУРСУ*
З ДИСЦИПЛІНИ __СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ__

ТЕМА: № 2. Розв’язання задач з теорії графів. Алгоритм Дейкстри

Методична розробка обговорена на засіданні кафедри
Протокол № ____ від _______20 р.

м. Львів

ТЕМА: № 2. Розв’язання задач з теорії графів. Алгоритм Дейкстри

Мета заняття

навчальна: ознайомити студентів з основними задачами з теорії графів; навчити знаходити найкоротший шлях між двома парами вершин, знаходити екстремальні шляхи на графах.

виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.

розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

Навчальний час: 2 години.
Місце проведення: згідно з розкладом.
Забезпечення заняття: ПК, МП.

Література:

1. *Махней О.В., Гой Т.П.* (2013). Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 304.
2. *Білоус А.Б., Могила І.А.* (2012). Оптимізаційні задачі на транспорті. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 32 с.
3. *Білоус А.Б., Могила І.А.* (2012). Прикладні задачі дослідження операцій на транспорті. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 36 с.

Структурні елементи заняття

- організаційно-вступна частина;
- вивчення нового матеріалу з одночасним виконанням прикладів на ПК;
- закріплення нового матеріалу;
- видача завдання для самостійного виконання.

Розробила:
доцент кафедри прикладної математики і механіки,
к. ф.-м. наук Оксана Чмир

Задача про найкоротший шлях між двома парами вершин. Алгоритм Дейкстри.

Нехай заданий орієнтований граф з n+1 вершинами, у якому виділені дві вершини – вхід (нульова вершина) і вихід (вершина з номером n). Такі графи називають сітьовими графіками або мережами. Нехай для кожної дуги задане число l_{ij}, яке будемо називати довжиною або вагою дуги. Граф, для якого задано довжини дуг називають зваженим.

Довжиною шляху називають суму довжин вхідних у нього дуг. Якщо довжини дуг не задані, то довжина шляху визначається як число вхідних у нього дуг. Завдання полягає в пошуку найкоротшого шляху (шляху мінімальної довжини) від початкової до кінцевої вершини.

Припустимо, що в сітьовому графіку можна пронумерувати вершини таким чином, що для будь-якої дуги (i, j) має місце $j > i$. Така нумерація називається правильною.

Найкоротший шлях у сітьовому графіку, що має правильну нумерацію, визначається наступним алгоритмом Дейкстри.

Алгоритм Дейкстри.

Крок 0: Позначаємо нульову вершину індексом $\lambda_0 = 0$;

Крок k: Позначаємо вершину k індексом $\lambda_k = \min\limits_{i<k}(\lambda_i + l_{ik})$.

Індекс виходу λ_n буде дорівнювати довжині найкоротшого шляху.

Коли індекси установляться, найкоротший шлях визначається методом зворотного ходу від виходу до входу.

Описаний алгоритм дозволяє знайти найкоротший шлях від нульової вершини до всіх інших. Цей алгоритм можна застосовувати лише для дуг невід’ємної довжини.

На рис. 1. наведений приклад застосування алгоритму Дейкстри для визначення найкоротшого шляху (числа біля дуг дорівнюють довжинам дуг, індекси вершин поміщені у квадратні дужки, найкоротший шлях виділений жирними лініями).

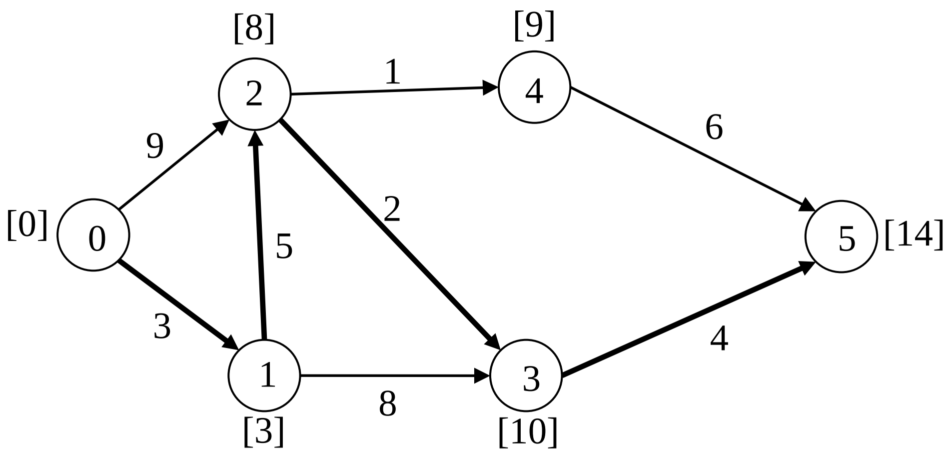


Рис. 1.

Дерева

Зв’язний граф, який не має циклів називають **деревом**. Зв’язний граф *T*, що містить всі вершини графа *G* і не містить циклів називають **кістяковим деревом графа *G***.

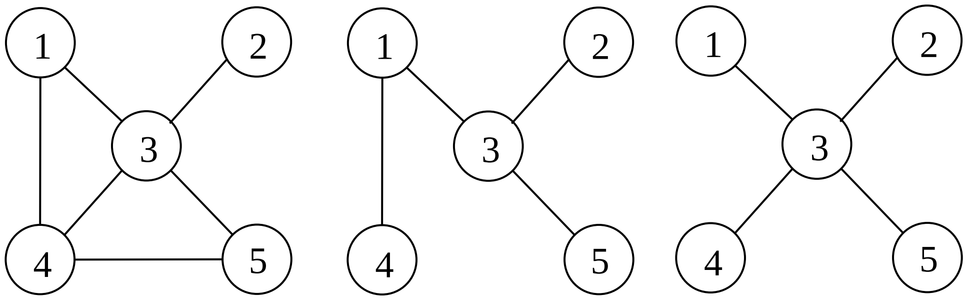


Рис. 2.

На рисунку 2. зображено граф та два його кістякових дерева.

Однією з важливих задач теорії графів є пошук кістякового дерева мінімальної довжини для зваженого графа. Така задача має широке практичне застосування при проектуванні доріг, електричних мереж, трубопроводів, тобто в ситуаціях, де необхідно з’єднати задану множину об’єктів комунікаційними лініями так, щоб сумарна їх вартість (або довжина) була мінімальною. Одним з алгоритмів знаходження мінімального кістякового дерева є **алгоритм Краскала.**

Алгоритм Краскала. Нехай задано зважений неорієнтований граф *G* з *n* вершинами. Позначимо *V* множину всіх вершин графа *G*, *E* – множину ребер мінімального кістякового дерева *T* графа *G*. За означенням, множина вершин дерева *T* дорівнює множині вершин графа *G*. Множина ребер E_T дерева *T* формується поступово за наступним алгоритмом.

Крок 0. Покладаємо $E_{T,0} = \varnothing$.

Крок *i*. ($i = \overline{1, n-2}$). Покладаємо $E_{T,i+1} = E_{T,i} \cup e$, де e – ребро графа *G*, яке має мінімальну вагу, не належить $E_{T,i}$ та не утворює циклу з ребрами множини $E_{T,i}$.

Приклад. Телевізійна компанія планує підключення до своєї кабельної мережі п’ять нових районів (рис.3.). На графі показана структура мережі, що планується й відстані (в км) між районами (вершини 2,3,4,5,6) й телецентром (вершина 1). Необхідно спланувати найбільш економну кабельну мережу.

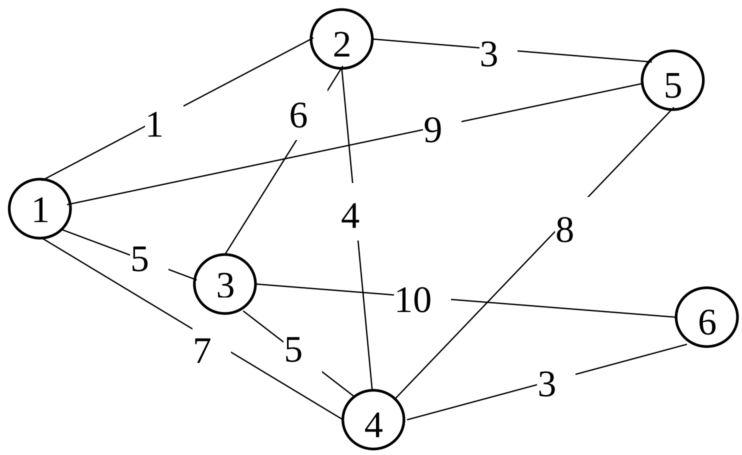


Рис. 3.

Розв'язання.

Побудову мінімального кістякового дерева починаємо з відбору всіх вершин графа, заданого на рис. 3. та вибору ребра з найменшою довжиною – ребро (1, 2). Наступні ребра, які увійду до шуканого дерева (2,5) та (4,6), жодне з них не утворює циклу з побудованими ребрами кістякового дерева. Далі (2,4), (1,3) або (3,4). Мінімальне кістякове дерево зображено на рис.4.

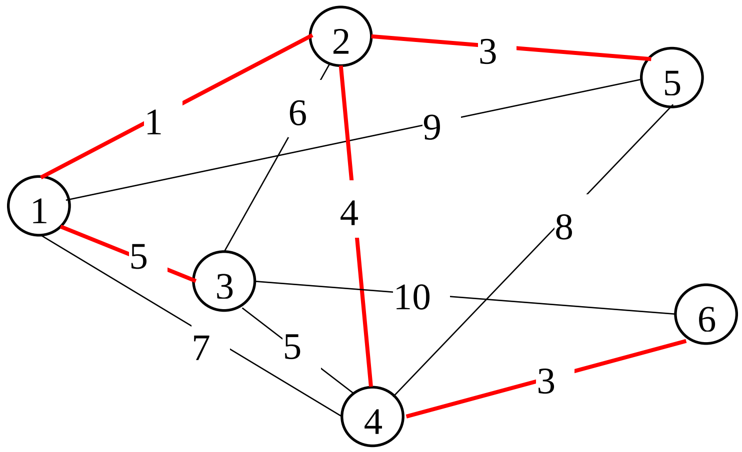


Рис. 4.

Приклади задач

Задача про заміну обладнання. Компанія з прокату автомобілів розробляє план заміни парку транспортних засобів на наступні 5 років (2017-2021 рр.). Кожен автомобіль повинен відпрацювати не менше одного і не більше трьох років. В табл. 1. наведено вартість заміни автомобіля залежно від року купівлі на тривалості експлуатації (включає вартість нового автомобіля, експлуатаційні витрати та доходи від продажу старого автомобіля).

Таблиця 1.

Рік купівлі	Вартість заміни залежно від тривалості експлуатації, тис. грн.		
	1	2	3
2017	40	54	98
2018	43	62	87
2019	48	71	–
2020	49	–	–

Розв'язання.

Задачу можна зобразити у вигляді графа (мережі) з п'ятьма вершинами, що відповідають 2017-2021 рокам (рис.5.). З вершини 1 (2017 рік) дуги йдуть лише до вершин 2, 3 та 4, оскільки автомобіль може експлуатуватись не менше одного і не більше трьох років. Дуги з інших вершин інтерпретуються аналогічно. Довжини дуг є вартістю заміни автомобілів. Розв'язування задачі є еквівалентним пошуку найкоротшого шляху між вершинами 1 та 5.

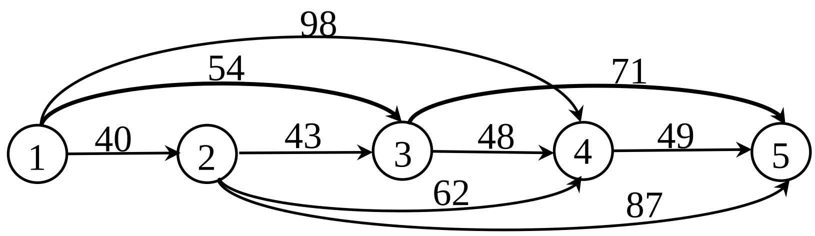


Рис. 5.

Найкоротшим шляхом є шлях 1–3–5. Цей розв'язок означає, що автомобілі, придбані в 2017 році (вершина 1), будуть експлуатуватись 2 роки до 2019 року (вершина 3), потім вони замінюються новими, які будуть експлуатуватись до кінця 2021 року. Загальна вартість заміни одного автомобіля становить: 54+71=125 тис. грн.

Найбільш надійний маршрут. На рис. 6. наведено схему мережі вулиць, якими певний водій щоденно їздить автомобілем з дому на роботу. Дана ділянка вулично - дорожньої мережі посилено контролюється нарядами поліції, і автомобіль цього водія часто зупиняють за перевищення швидкості. Тому цей водій планує розробити маршрут, на якому він би мав найбільшу ймовірність не бути зупиненим інспекторами поліції. Імовірність проїзду без зупинки для кожної вулиці наведено на схемі (рис. 6.). Знайти найкоротший шлях та ймовірність того, що цей водій не буде зупиненим.

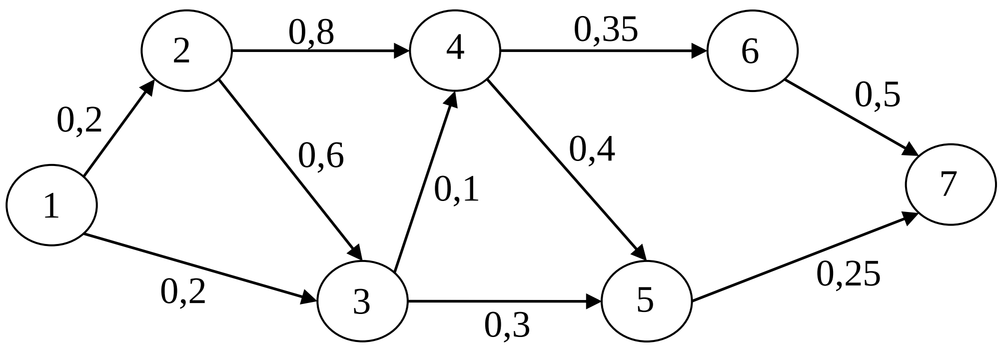


Рис. 6.

Розв'язання.

Імовірність не бути зупиненим на всій ділянці маршруту P дорівнює добутку ймовірностей не бути зупиненим кожної ділянки шляху p_i, тобто $P = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Цю задачу можна сформулювати як задачу пошуку найкоротшого шляху, якщо замість ймовірностей використовувати логарифми ймовірностей. Тоді добуток ймовірностей перетвориться в суму логарифмів ймовірностей $\lg P = \lg p_1 + \lg p_2 + ... + \lg p_k$.

Максимізація ймовірностей p_i еквівалентна максимізації величини $\lg p_i$. Оскільки $p_i \le 1$, то $\lg p_i \le 0$. Замінивши ймовірності p_i на величини $(-\lg p_i)$, отримуємо мережу, для якої потрібно знайти найкоротший шлях (рис. 7.).

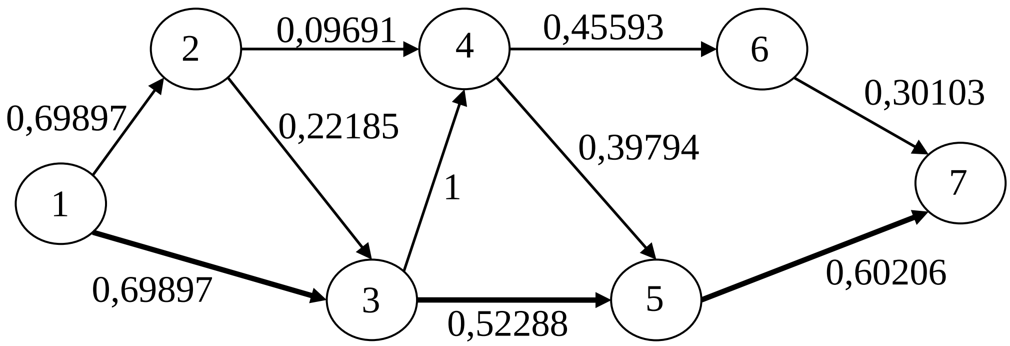


Рис. 7.

Найкоротшим шляхом є шлях 1→3→5→7 з «довжиною»: $(-\lg P) = 1{,}82391$. Тоді максимальна ймовірність не бути зупиненим становить $P = 0{,}0149$.

Розв'язання задач теорії графів в Maple

Для розв'язання задач теорії графів в ***Maple*** потрібно підключити пакет ***GraphTheory***:

>with(***GraphTheory***):

Зважений граф (орієнтований та неорієнтований) можна задати функцією

***Graph*(*A*)**

де $\boldsymbol{A}$ – матриця довжин дуг (ребер) графа. Якщо дуга (ребро) (i, j) відсутня у графі, то елемент матриці $a_{ij} = 0$.

Зобразити граф можна за допомогою функції

***DrawGraph*(*G*)**

де $\boldsymbol{G}$ – заданий граф (рис. 8.).

```
> restart :
> with(GraphTheory) :
> A := Matrix([[0, 1, 2, 0], [2, 0, 7, 0], [6, 5, 0, 2], [1, 0, 4, 0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> G := Graph(A);
```

G := Graph 1: a directed weighted graph with 4 vertices and 9 arc(s) (2)

```
> DrawGraph(G);
```

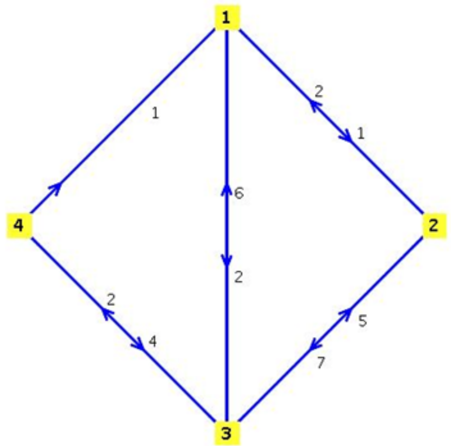


Рис. 8.

Для знаходження відстаней між будь-якою парою вершин призначена функція

***AllPairsDistance*(*G*)**

Відстань та шлях між парою вершин ***s*** та ***t*** вершин знаходимо за допомогою функції

***DijkstrasAlgorithm*(*G, s, t*)**

Приклад 1. Для графа *G*, заданого на рис.8. знайти найменші відстані між будь-якою парою вершин. Знайти найкоротший шлях між вершиною 3 та 2.

Розв'язання.

> **Матриця найменших відстаней між будь-якою парою вершин графа G**
> *AllPairsDistance*(*G*);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

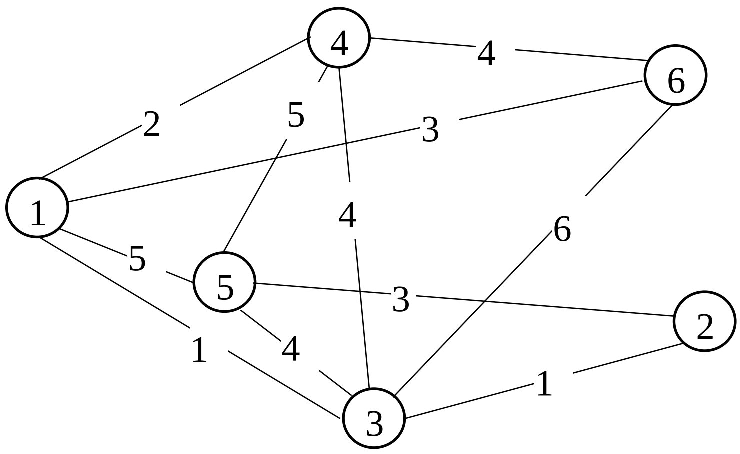
> **Шлях та відстань між вершинами 3 та 2 графа G**
> *DijkstrasAlgorithm*(*G*, 3, 2);

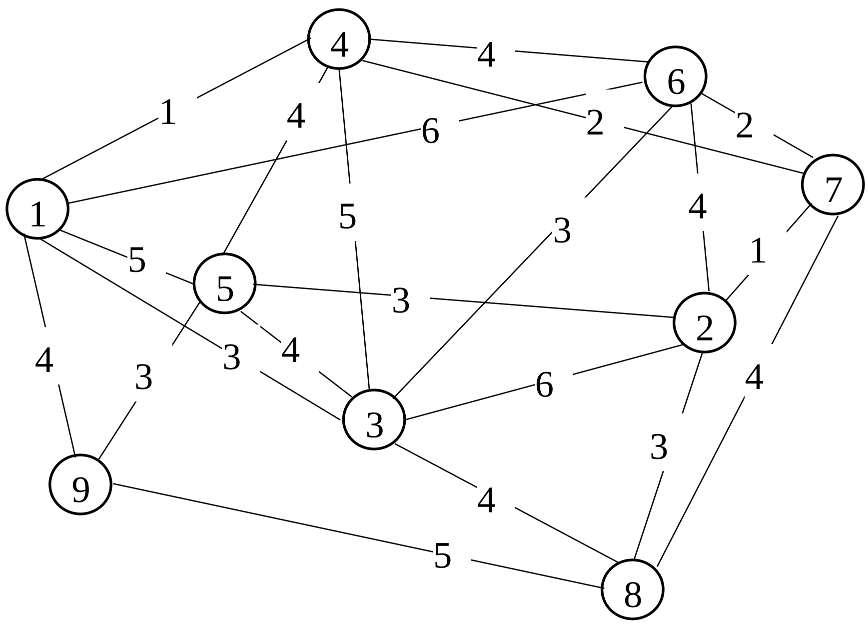
$$[[3, 4, 1, 2], 4] \qquad (4)$$

Тобто найкоротший шлях між вершиною 3 та 2: 3→4→1→2, довжина його 4.

Завдання для самостійного виконання.

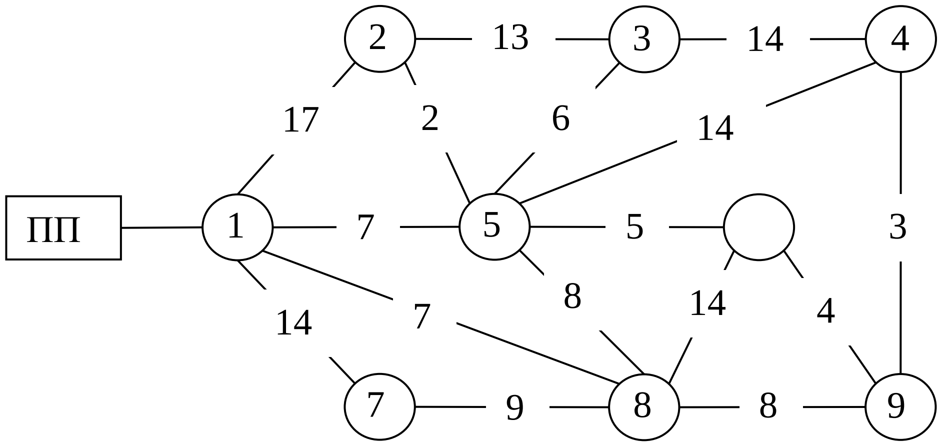
1. Для заданих неорієнтованих графів знайти мінімальне кістякове дерево.



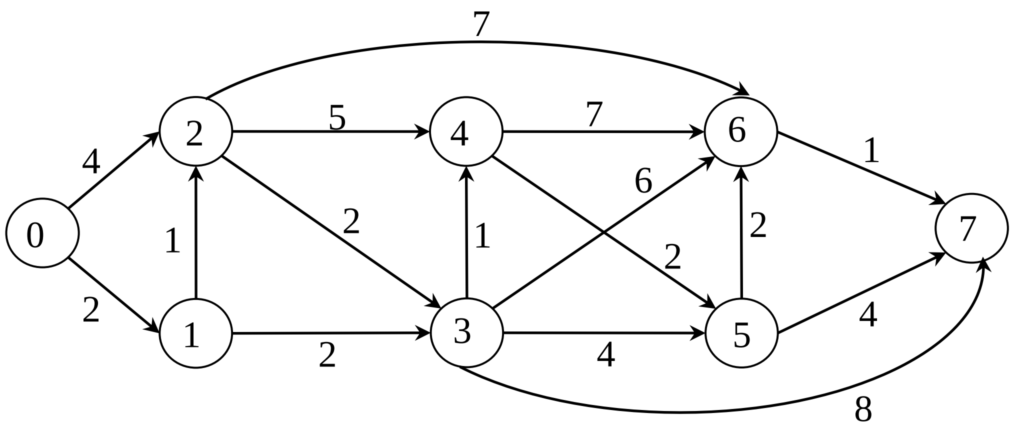


2. Газовидобувна компанія планує з’єднати приймальний пункт з буровими платформами, розміщеними у відкритому морі. Схему розташування платформ наведено на рисунку (відстані між платформами наведено в кілометрах). Платформа **1** розташована найближче до берега, тому вона оснащена необхідним обладнанням для перекачування газу від інших платформ до приймального пункту. Необхідно спроектувати мережу трубопроводів мінімальної довжини, що з’єднує приймальний пункт зі всіма буровими платформами.

Припустимо, що платформи розбито на групи залежно від тиску газу в свердловинах. До групи з високим тиском належать платформи **2**, **3**, **4**, **5**, до групи з низьким тиском – платформи **6**, **7**, **8**, **9**. Через різницю в тиску платформи різних груп не можна з’єднувати між собою. Проте платформи різних груп можуть приєднуватись до приймального пункту через платформу **1**. Визначити мінімальну мережу трубопроводів для вказаної ситуації.



3. Знайти найкоротший шлях між нульовою вершиною та вершиною з найбільшим номером, а також відстань між будь-якою парою вершин.

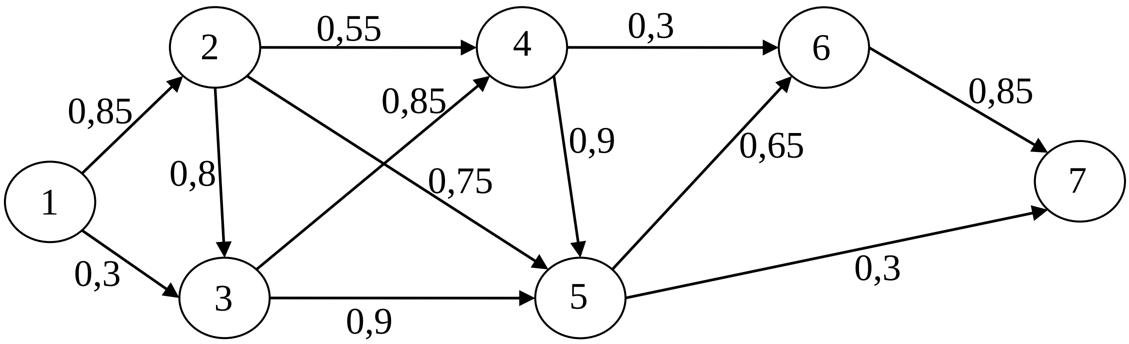


4. Компанія з прокату автомобілів розробляє план заміни парку транспортних засобів на наступні 7 років (2024-2030 рр.). Кожен автомобіль повинен відпрацювати не менше двох і не більше чотирьох років. В таблиці наведено

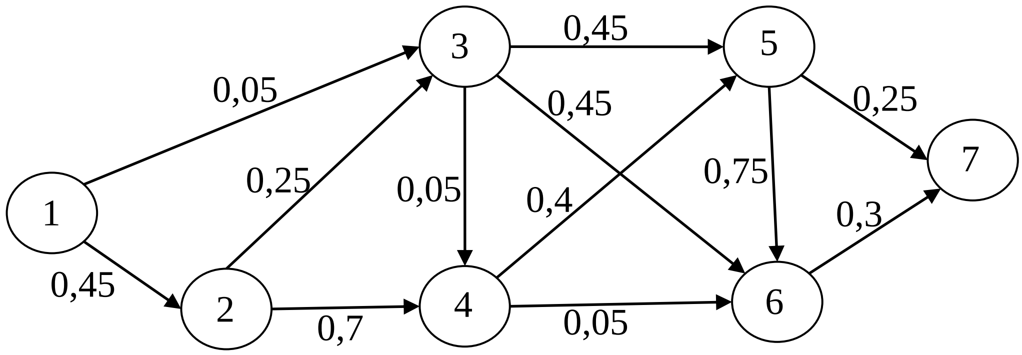
вартість заміни автомобіля залежно від року купівлі на тривалості експлуатації (включає вартість нового автомобіля, експлуатаційні витрати та доходи від продажу старого автомобіля). Знайти план заміни транспортних засобів та його вартість.

Рік купівлі	*Вартість заміни залежно від тривалості експлуатації, тис. грн.*		
	2	3	4
2024	45	48	53
2025	54	51	55
2026	58	54	60
2027	60	57	63
2028	64	62	–
2029	67	–	–

5. На рисунку наведено схему мережі вулиць, якими певний водій щоденно їздить автомобілем з дому на роботу. Дана ділянка вулично - дорожньої мережі посилено контролюється нарядами поліції, і автомобіль цього водія часто зупиняють за перевищення швидкості. Тому цей водій вирішує розробити маршрут, на якому він би мав найбільшу ймовірність не бути зупиненим інспекторами поліції. Імовірність проїзду без зупинки для кожної вулиці наведено на рисунку. Знайти найкоротший шлях та ймовірність того, що цей водій не буде зупиненим.



6. На рисунку наведено схему мережі вулиць, якими водій щоденно їздить автомобілем з дому на роботу. Інтенсивність руху на даній ділянці вулично - дорожньої мережі є значною, і на ній часто виникають затори. Тому водій планує розробити маршрут, на якому він би мав найбільшу ймовірність не потрапити в затор. Імовірність виникнення затору для кожної вулиці наведено на рисунку. Знайти найкоротший маршрут та ймовірність не потрапити в затор.



7. Транспортна компанія розробляє маршрут для перевезення небезпечного вантажу з пункту **1** в пункт **7**. Схему доріг, що сполучають ці пункти, а також імовірність виникнення ДТП на кожній з них наведено на рисунку. Потрібно скласти маршрут, імовірність виникнення ДТП на якому є мінімальною.