

Метод поділу навпіл (метод бісекцій)

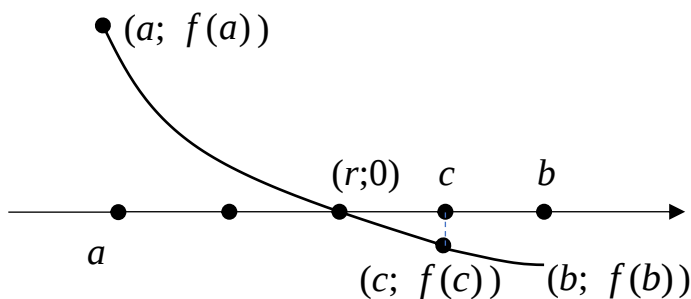
Нехай на кінцях відрізка $[a;b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків: $f(b) \cdot f(a) < 0$. Тоді графік неперервної функції $y = f(x)$ перетинає вісь Ox в точці $x = r$. Наближено знайти значення r можна *методом половинного поділу*.

Розглянемо *алгоритм методу половинного поділу*

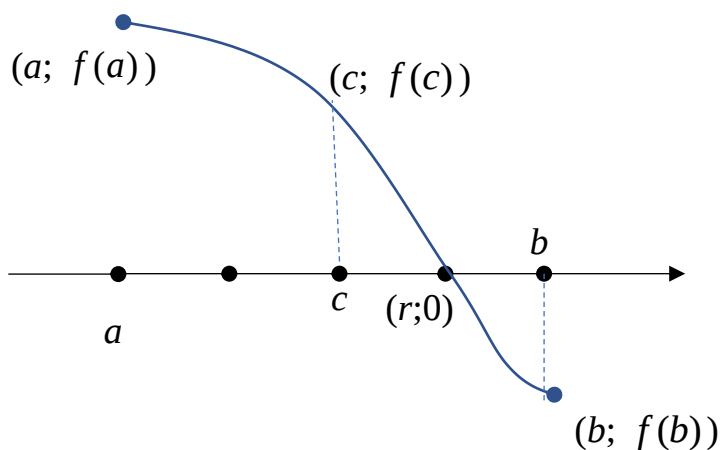
1. Знаходимо точку c , яка є серединою відрізка $[a;b]$: $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Обчислюємо значення функції в середині відрізка, в точці c .
3. Якщо $f(a) \cdot f(c) < 0$, тоді корінь знаходиться у відрізку $[a;c]$.

Якщо $f(b) \cdot f(c) < 0$, тоді корінь знаходиться у відрізку $[c;b]$.

4. Розглядаємо коротший відрізок, в якому знаходиться корінь рівняння – відрізок $[a;c]$, або $[c;b]$. Знаходимо його середину і виконуємо обчислення описані в пунктах 2 та 3.
5. Повторюємо процес доти, доки не досягнемо потрібної точності кореня.



Виконуємо
стиск справа



Виконуємо
стиск зліва

Таким чином, метод поділу навпіл зсуває кінці відрізка, в якому знаходиться корінь рівняння ближче, поки на інтервалі не отримаємо доволіно малий відрізок,

який містить нуль функції. Вирішальним кроком процесу поділу інтервалу на половину є вибір середньої точки $c = \frac{a+b}{2}$ і аналіз трьох можливостей, які можуть виникнути:

- якщо $f(a)$ і $f(c)$ мають різні знаки, то нуль (корінь) належить $[a;c]$
- якщо $f(c)$ і $f(b)$ мають різні знаки, то нуль (корінь) належить $[c;b]$
- якщо $f(c) = 0$, нулем (коренем) є c .

Процес поділу включає послідовність вкладених інтервалів і точок, які є їх серединами:

- $[a_0;b_0]$ - початковий інтервал $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ - середина;
- $[a_1;b_1]$ - другий інтервал, який містить нуль r і c_1 - його середина,

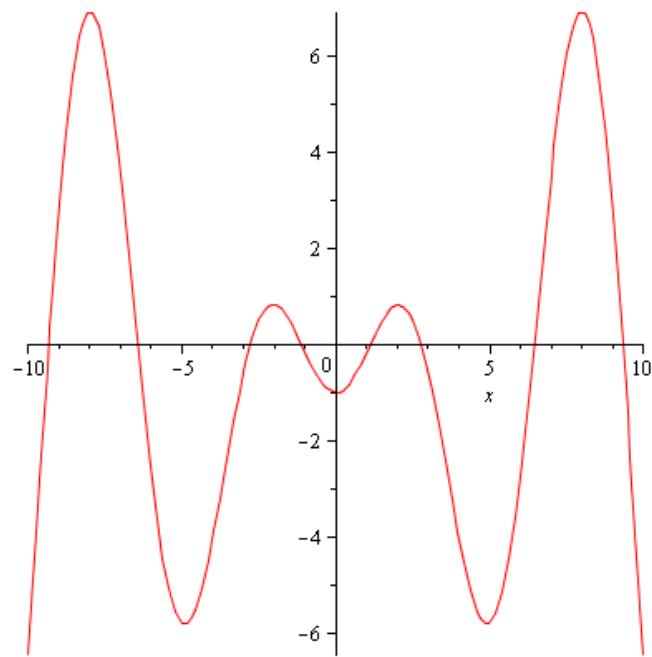
довжина інтервала $[a_1;b_1]$ дорівнює половині довжини $[a_0;b_0]$.

Приклад. Знайти наближено розв'язок рівняння $x \sin x = 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = x \sin x - 1$ і замінимо задане рівняння еквівалентним йому $x \sin x - 1 = 0$ або інакше, знайдемо нулі функції $f(x)$.

1. Виконаємо побудову графіка функції в пакеті Maple

```
> plot(x·sin(x) - 1)
```



З рисунка видно, що рівняння має безліч коренів.

Знайдемо наближено корінь, що знаходиться у відрізьку $[0; 2]$.

Розрахунки методу половинного поділу виконаємо за допомогою середовища Excel.

1. Сформуємо таблицю для розрахунків

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	крок	ak	ck	bk	$f(ak)$	$f(ck)$	$f(bk)$		$f(x)=x \sin x -1$

2. Введемо в комірку A2 номер кроку, тобто число 0, в комірку B2 введемо початок проміжку, в якому знаходиться корінь рівняння, число 0, в комірку D2 введемо кінець проміжку, тобто число 2. Знайдемо середину проміжку в комірці C2, застосувавши формулу $=(B2+D2)/2$.

3. Обчислюємо значення функції в точках a_0 , c_0 , b_0 в комірках E1, F1, G1 відповідно. Для цього використовуємо формули:

$$E1:= B2*\text{SIN}(B2)-1$$

$$F2:= C2*\text{SIN}(C2)-1$$

$$G2:= D2*\text{SIN}(D2)-1$$

Результати бачимо на рисунку:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	крок	ak	ck	bk	$f(ak)$	$f(ck)$	$f(bk)$		$f(x)=x \sin x -1$
2	0	0	1	2	-1	-0,158529	0,81859485		

В точках c_1 та b_1 функція набуває значень протилежних знаків. Таким чином проміжок, в якому знаходиться корінь рівняння звужився з $[0;2]$ до $[1;2]$

4. Вводимо в комірку A3 номер наступного кроку, тобто число 1, в комірку B3 введемо початок нового (вужчого) проміжку, в якому знаходиться корінь рівняння, число 1, в комірку D3 введемо кінець проміжку, тобто число 2. Знайдемо середину проміжку в комірці C3, застосувавши маркер заповнення, обчислюємо значення функції в точках a_1 , c_1 , b_1 також використовуємо маркер заповнення.

Результати бачимо на рисунку

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	крок	ak	ck	bk	$f(ak)$	$f(ck)$	$f(bk)$		$f(x)=x \sin x -1$
2	0	0	1	2	-1	-0,158529	0,81859485		
3	1	1	1,5	2	-0,158529	0,49624248	0,81859485		

Тепер бачимо, функція набуває протилежних знаків в точках a_1 , c_1 , тобто проміжок $[1;2]$ тепер звужився до проміжку $[1;1,5]$

5. Вводимо в комірку A4 номер наступного кроку, тобто число 2, в комірку B4 введемо початок нового (вужчого) проміжку, в якому знаходиться корінь рівняння, число 1, в комірку D4 введемо кінець проміжку, тобто число 1,5. Знаходимо середину проміжку в комірці C4, застосувавши маркер заповнення, обчислюємо значення функції в точках a_2 , c_2 , b_2 також використовуємо маркер заповнення.

6. Встановлюємо в яких точках функція набуває протилежних знаків і продовжуємо алгоритм до досягнення потрібної точності (кількість нулів після коми в значеннях функції, або кількості однакових цифр в значеннях кінців проміжку).

7. На рисунку бачимо результат виконання тринадцяти кроків алгоритму. Наближеним значенням кореня можемо вважати число 0,114.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	крок	ak	ck	bk	$f(ak)$	$f(ck)$	$f(bk)$	
2	0	0	1	2	-1	-0,158529	0,81859485	
3	1	1	1,5	2	-0,158529	0,49624248	0,81859485	
4	2	1	1,25	1,5	-0,158529	0,18623077	0,49624248	
5	3	1	1,125	1,25	-0,158529	0,01505104	0,18623077	
6	4	1	1,0625	1,125	-0,158529	-0,0718266	0,01505104	
7	5	1,0625	1,09375	1,125	-0,0718266	-0,0283617	0,01505104	
8	6	1,09375	1,109375	1,125	-0,0283617	-0,0066428	0,01505104	
9	7	1,109375	1,117188	1,125	-0,0066428	0,00420803	0,01505104	
10	8	1,109375	1,113281	1,117188	-0,0066428	-0,0012165	0,00420803	
11	9	1,11328125	1,115234	1,117188	-0,0012165	0,001496	0,00420803	
12	10	1,11328125	1,114258	1,115234	-0,0012165	0,00013981	0,001496	
13	11	1,11328125	1,11377	1,114258	-0,0012165	-0,0005383	0,00013981	
14	12	1,11376953	1,114014	1,114258	-0,0005383	-0,0001993	0,00013981	
15								

Реалізуємо алгоритм пошуку наближеного кореня рівняння методом половинного поділу мовою програмування Python.

```
import math
a=0
b=2
def f(x):
    f=x*math.sin(x)-1
    return f
print("f(x)=x*sin(x)-1")
e=10**(-4)
c=(a+b)/2
while abs(a-b)>2*e:
    u=f(a)
    v=f(c)
    if u*v<0:
        a=a
        b=c
    else:
        a=c
        b=b
    c=(a+b)/2
    print("a=",a,"b=",b,"f(a)=",u,"f(b)=",b,"f(c)=",v)
print("Корінь рівняння x=",c)
```