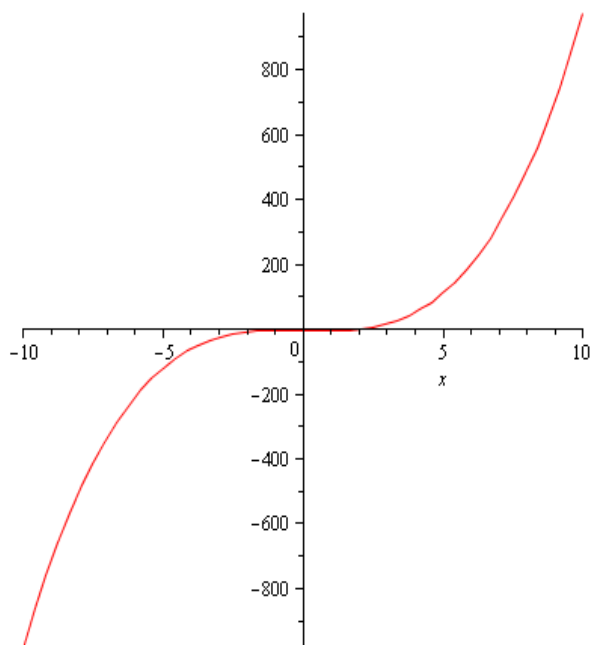


ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4.

Перетворити рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5$ до вигляду $x = \phi(x)$ та знайти корені методом ітерацій.

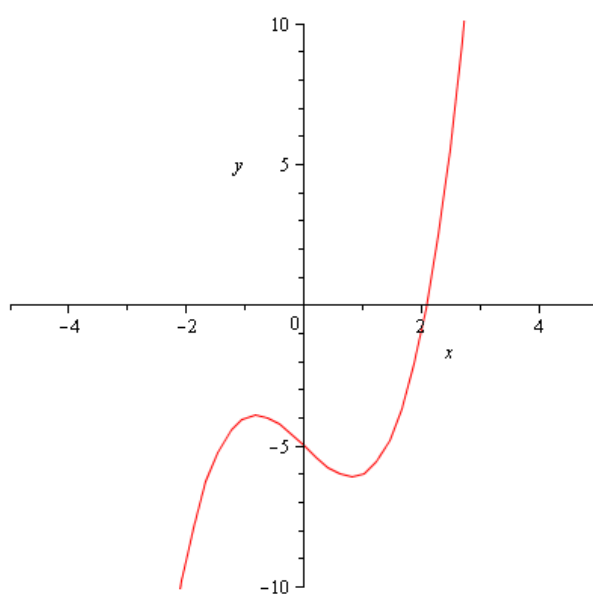
1. Побудуємо графік функції в пакеті Maple з метою встановлення проміжку ізоляції

```
> plot(x^3 - 2*x - 5)
```



З такого рисунка неможливо встановити кількість коренів та проміжок ізоляції. Деталізуємо графік, побудувавши його на проміжку $[-5; 5]$

```
> plot(x^3 - 2*x - 5, x = -5 .. 5, y = -10 .. 10)
```



Тепер бачимо, що рівняння має один корінь, що знаходиться у відрізку $[2; 3]$.

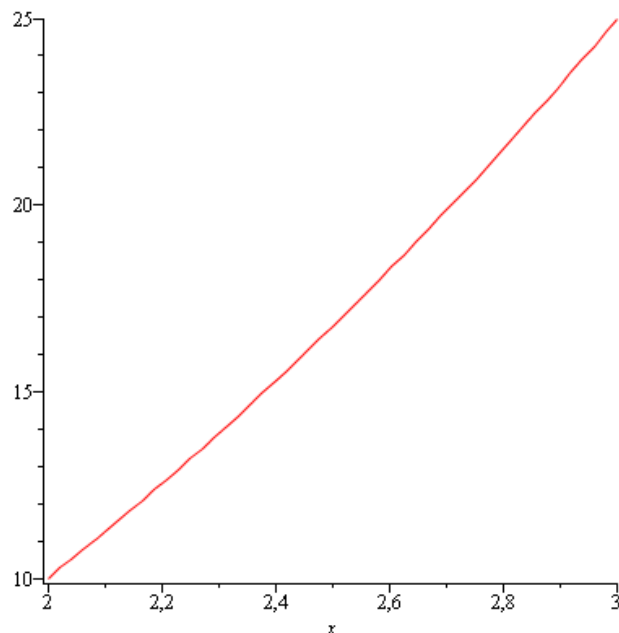
2. Для знаходження сталої λ з умови $\lambda \leq \frac{2}{\max_{x \in [a,b]} |f'(x)|}$ знайдемо похідну функції $f(x)$.

Можемо також скористатись пакетом Maple для знаходження похідної

```
-
> f := x^3 - 2*x - 5
                                     f := x^3 - 2 x - 5
=
> fp :=  $\frac{d}{dx} f$ 
                                     fp := 3 x^2 - 2
=
```

Побудуємо графік похідної, тобто функції $|fp|$ на відрізку $[2;3]$

```
> plot(abs(fp), x = 2..3)
```



Бачимо, що $\max_{x \in [2;3]} |f'(x)| = f'(3)$. Обчислимо значення похідної в точці $x=3$:
 $f'(3) = 25$.

$$\lambda \leq \frac{2}{\max_{x \in [a,b]} |f'(x)|} = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Можна вважати, що $\lambda = 0,078$ і шукане рівняння має вигляд

$$x = x - \lambda f(x) = -0,078x^3 + 1,156x + 0,39.$$

Для зручності і швидкості обчислень можна скористатись пакетом Maple

```
> λ := 0.078
> φ := x - λ·f
```

$\lambda := 0.078$

$\varphi := 1.156x - 0.078x^3 + 0.390$

Щоб забезпечити збіжність ітераційного процесу перевіримо виконання умови

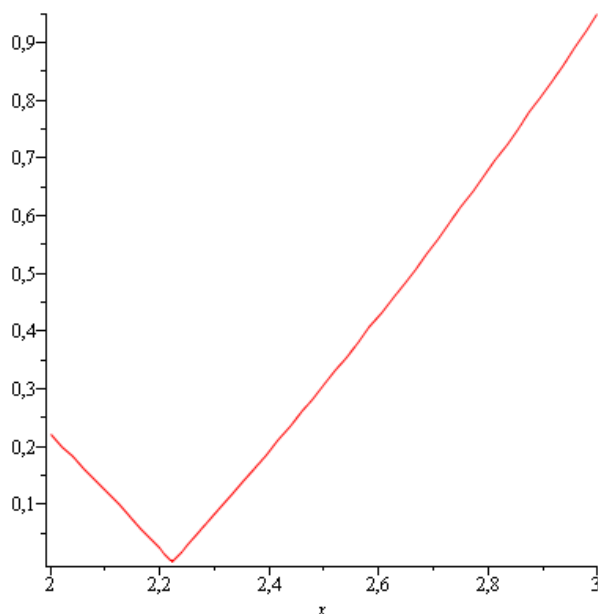
$$|\varphi'(x)| < 1$$

Скористаємось для цього середовищем Maple: знайдемо похідну функції $\varphi(x)$ та нарисуємо графік $|\varphi'(x)|$ на відрізку $[2;3]$ щоб побачити в якій точці досягається найбільше значення функції $|\varphi'(x)|$, а потім знайти його величину

```
> φp := d/dx (φ)
```

$\varphi p := 1.156 - 0.234x^2$

```
> plot(abs(φp), x = 2..3)
```



З рисунка бачимо, що свого найбільшого значення $|\varphi'(x)|$ набуває в точці $x = 3$.

Обчислимо це значення:

```
> m := abs(1.156 - 0.234 · 3^2)
```

$m := 0.950$

Бачимо, що збіжність ітераційного процесу забезпечується, оскільки $|\varphi'(x)| < 1$.

Таким чином, еквівалентне рівняння $x = \varphi(x)$ має вигляд:

$$x = -0,078x^3 + 1,156x + 0,390$$

Виконаємо обчислення в середовищі Excel.

1. Сформуємо таблицю для розрахунків

	A	B	C	D	E	F
1	x	$\phi(x)$	q	ε	$(1-q)*\varepsilon/q$	$x_k - x_{k+1}$

2. В комірку A2 вносимо початкове наближення- число 2; в комірку B2 вносимо формулу $=-0,078*A2^3+1,156*A2+0,39$ та отримуємо результат обчислень; в комірку C2 вносимо величину $q = \max_{[2;3]} |\phi'(x)| = 0,95$; в комірку D2

вносимо величину $\varepsilon = 10^{-6}$. В комірці E2 розраховуємо точність використовуючи формулу $=(1-C2)*D2/C2$.

3. Результат обчислень з комірки B2 копіюємо і вставляємо в комірку A3 використовуючи опцію «спеціальна вставка», використовуючи маркер заповнення обчислюємо величину в комірці B3, в комірці F3 обчислюємо абсолютну величину різниці між величинами, обчисленими в комірках A3 і B3, використовуючи формулу $=ABS(A3-B3)$.

4. Продовжуємо процес: результат обчислень з комірки B3 копіюємо і вставляємо в комірку A4 використовуючи опцію «спеціальна вставка», використовуючи маркер заповнення обчислюємо величину в комірці B4, в комірці F4 обчислюємо абсолютну величину різниці між величинами, обчисленими в комірках A4 і B4.

5. Алгоритм продовжуємо доти, поки не досягнемо виконання умови $|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon$.

Результати обчислень зображено на рисунку:

	A	B	C	D	E	F
1	x	$\phi(x)$	q	ε	$(1-q)*\varepsilon/q$	$x_k - x_{k+1}$
2	2	2,078	0,95	0,000001	5,26316E-08	
3	2,078	2,092275673				0,014276
4	2,092275673	2,094254436				0,001979
5	2,094254436	2,094512998				0,000259
6	2,094512998	2,094546501				3,35E-05
7	2,094546501	2,094550837				4,34E-06
8	2,094550837	2,094551398				5,61E-07
9	2,094551398	2,094551471				7,26E-08
10	2,094551471	2,09455148				9,4E-09
11						

З обчислень бачимо, що коренем можна вважати число

$$x = 2,09455148$$

Реалізуємо цю задачу мовою програмування Python

```
import math
def f(x):
    f=-0.078*x**3+1.156*x+0.39
    return f
a=2
b=3
eps=10**(-6)
def FP(x):
    FP=-0.234*x**2+1.156
    return FP
q=abs(FP(b))
x0=a
eps1=eps*(1-q)/q
x1=f(x0)
while abs(x1-x0)>=eps1:
    x0=x1
    x1=f(x0)
    print('x=',x1)
    print('f(x)=',f(x1))
print('корінь рівняння x=',x1)
```

```
x= 2.092275672944
f(x)= 2.094254436440315
x= 2.094254436440315
f(x)= 2.094512998327616
x= 2.094512998327616
f(x)= 2.0945465007861173
x= 2.0945465007861173
f(x)= 2.0945508369811785
x= 2.0945508369811785
f(x)= 2.0945513981308457
x= 2.0945513981308457
f(x)= 2.0945514707482222
x= 2.0945514707482222
f(x)= 2.0945514801454843
x= 2.0945514801454843
f(x)= 2.094551481361564
корінь рівняння x= 2.0945514801454843
```