

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задачі техніки і природознавства зводяться до відшукування розв'язку певного диференціального рівняння (або системи диференціальних рівнянь), який задовольняє певні початкові умови (задача Коші). Проінтегрувати таке рівняння в скінченному вигляді вдається досить рідко. Але навіть якщо це стає можливим, то в результаті інтегрування отримуємо такий вираз, до якого шукана функція входить неявно, а тому користуватися таким аналітичним виразом функції є незручно.

На практиці застосовують здебільшого наближене інтегрування диференціальних рівнянь. Воно дає змогу знайти наближений розв'язок задачі Коші або у вигляді аналітичного виразу, наприклад ряду Тейлора, або у вигляді деякої таблиці значень.

Розглянемо окремі методи чисельного інтегрування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку розв'язаного відносно похідної.

Наближений розв'язок задачі Коші запишемо у вигляді таблиці значень.

Задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x)|_{x=x_0} = y_0 \quad (2).$$

Геометрично це означає, що треба знайти ту інтегральну криву $y(x)$, яка проходить через точку (x_0, y_0) .

Задача Коші має єдиний розв'язок наприклад при виконанні теореми Пікара.

Теорема Пікара. Якщо функція двох змінних $f(x, y)$ неперервна в замкнутому прямокутнику

$$\bar{\Delta} = \{(x, y): |x - x_0| \leq l, |y - y_0| \leq b\}$$

з центром в точці (x_0, y_0) і задовольняє умову Ліпшиця по змінній y , тобто існує число $K > 0$, яке не залежить від x, y таке, що

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

для будь яких двох точок $(x_1, y_1) \in \bar{\Delta}$, $(x_2, y_2) \in \bar{\Delta}$, то існує диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння (1), що задовольняє умову (2).

Цей розв'язок визначений і неперервно диференційовний принаймні на відрізку

$$[x_0 - h; x_0 + h] \text{ де } h = \min\{l, \frac{b}{M}\}, M = \max |f(x, y)|, (x, y) \in \bar{\Delta}.$$

Розглянемо так звані однокрокові чисельні методи розв'язування задачі Коші в яких щоб знайти наближений розв'язок у точці $x_{k+1} = x_k + h$ досить знайти її розв'язок у точці x_k . І оскільки розв'язок задачі в точці x_0 відомий з початкових умов, то ці методи дають змогу обчислити послідовно значення розв'язку в точках $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ...

Метод Ейлера.

Нехай на відрізку $[x_0; x_0 + l]$ треба знайти чисельний розв'язок задачі Коші (1)-(2). Для цього відрізок $[x_0; x_0 + l]$ поділимо на n рівних частин точками

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x_0 + l$$

де $x_k = x_0 + kh$, $h = \frac{l}{n}$. Величину h називають кроком чисельного інтегрування.

Розв'язати задачу (1)-(2) чисельно – це означає для заданої послідовності точок $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x_0 + l = b$ незалежної змінної x і числа y_0 знайти числову послідовність $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто для заданої послідовності значень незалежної змінної $x_k = x_0 + kh$ побудувати таблицю наближених значень шуканого розв'язку задачі Коші.

Якщо $y = y(x)$ - шуканий розв'язок задачі (1)-(2), то підставляючи його в рівняння (1), отримуємо

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (4)$$

Проінтегруємо тотожність (4) на кожному з проміжків $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ одержимо:

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx \Rightarrow y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx$$

$$y(x_2) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x)) dx \Rightarrow y(x_2) = y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x)) dx$$

$$y(x_3) - y(x_2) = \int_{x_2}^{x_3} f(x, y(x)) dx \Rightarrow y(x_3) = y(x_2) + \int_{x_2}^{x_3} f(x, y(x)) dx$$

⋮

$$y(x_n) - y(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x)) dx \Rightarrow y(x_n) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x)) dx$$

Якщо h - досить малий крок, то завдяки неперервності функції $f(x, y)$ можна вважати що $f(x, y)$ є сталою функцією на кожному з проміжків $[x_i; x_{i+1}]$, тобто

$$f(x, y(x)) \approx f(x_i, y(x_i))$$

Тоді замість співвідношень (5) матимемо:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

...

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

де

$$y_i \approx y(x_i)$$

Формули (6) називають формулами Ейлера.

Розглянемо геометричну інтерпретацію методу Ейлера.

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ проведемо дотичну до кривої $y = y(x)$:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \text{ або } y - y_0 = f(x_0; y_0)(x - x_0)$$

Якщо $x = x_1$ то $y - y_0 = f(x_0; y_0)(x_1 - x_0)$

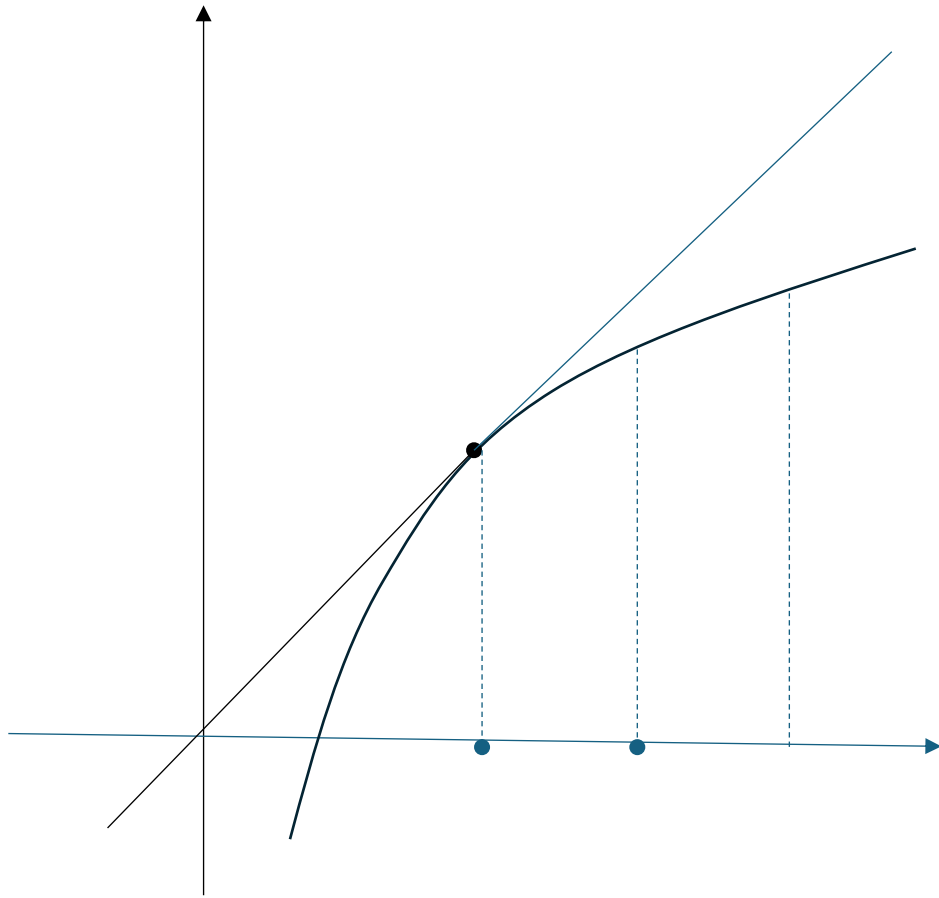
$$y_1 = y_0 + f(x_0; y_0)h$$

Тепер через точку $M_1(x_1, y_1)$ проведемо пряму з кутовим коефіцієнтом $f(x_1, y_1)$

будемо мати

$y - y_1 = f(x_1; y_1)(x - x_1)$. Якщо $x = x_2$ то $y_2 = y_1 + f(x_1; y_1)h$

Аналогічно через точку $M_2(x_2, y_2)$ проведемо пряму з кутовим коефіцієнтом $f(x_2, y_2)$.



Метод Рунге-Кутта.

Метод Рунге-Кутта є одним з методів підвищеної точності і він найчастіше використовується.

Нехай $y = y(x)$ - шуканий розв'язок задачі Коші. Розкладемо $y(x)$ в околі кожної точки x_i в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{y^{(r)}(x_i)}{r!}(x - x_i)^r + \dots$$

При $x = x_{i+1}$ матимемо:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{y^{(r)}(x_i)}{r!}(x_{i+1} - x_i)^r + \dots$$

Або

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(r)}(x_i)}{r!}h^r + \dots$$

За точне значення розв'язку можемо взяти

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(r)}(x_i)}{r!}h^r + \dots$$

Але потрібно шукати похідні і коефіцієнти що вимагає великого обсягу обчислень. Щоб не обчислювати коефіцієнти Рунге запропонував суму

$$\frac{y'(x_i)}{1!}h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(r)}(x_i)}{r!}h^r + \dots$$

Замінити лінійною комбінацією

$$S_{ir}(h) = p_{r1}k_1(h) + p_{r2}k_2(h) + \dots + p_{rr}k_r(h)$$

де $k_j(h) = hf(\xi_j, \eta_j)$

$$\xi_j = x_i + a_j h$$

$$\eta_j = y(x_i) + \beta_{j1}k_1(h) + \beta_{j2}k_2(h) + \dots + \beta_{j,j-1}k_{j-1}(h)$$

Найбільш використовуваними формулами є такі:

А)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$$

Б)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_2\right)$$

В)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_2\right)$$

На практиці найчастіше використовують формули Рунге-Кутта четвертого порядку

А)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Б)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3)$$

В)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_1 - 2k_2 + 2k_3)$$