Затверджую
Завідувач кафедри
прикладної математики і
механіки
ЛДУ БЖД

"__" ____________20___ р.

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА

ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ __2__ *КУРСУ*
З ДИСЦИПЛІНИ __СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ__

ТЕМА: № 3. Розв'язання задачі про максимальний потік

Методична розробка обговорена на засіданні кафедри
Протокол № ____ від _______20 р.

м. Львів

ТЕМА: № 3. Розв’язання задачі про максимальний потік

Мета заняття

навчальна: ознайомити студентів з основними задачами на потоки.

виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.

розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

Навчальний час: 2 години.

Місце проведення: згідно з розкладом.

Забезпечення заняття: ПК, МП.

Література:

1. *Махней О.В., Гой Т.П.* (2013). Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень. Івано-Франківськ: Сімик, 304.
2. *Білоус А.Б., Могила І.А.* (2012). Оптимізаційні задачі на транспорті. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 32 с.
3. *Білоус А.Б., Могила І.А.* (2012). Прикладні задачі дослідження операцій на транспорті. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 36 с.

Структурні елементи заняття

- організаційно-вступна частина;
- вивчення нового матеріалу з одночасним виконанням прикладів на ПК;
- закріплення нового матеріалу;
- видача завдання для самостійного виконання.

Розробила:
доцент кафедри прикладної математики і механіки,
к. ф.-м. наук Оксана Чмир

Задача про максимальний потік.

Мережа (сітьовий графік) може зображати систему, яка транспортує деякий продукт з одного пункту в інший. Цим продуктом можуть бути люди, електроенергія, природній газ тощо. Прикладом може бути мережа трубопроводів для транспортування нафти від свердловин через насосні станції до нафтопереробних заводів.

Використовуючи таке представлення розглянемо мережу як орієнтований граф, де кожній дузі (i, j) відповідає додатне дійсне число c_{ij}, яке називають ***пропускною здатністю*** у напрямку $i \to j$. Вхід будемо також називати ***джерелом***, а вихід – ***стоком***. Таку мережу аналітично можна задавати за допомогою **матриці пропускних здатностей**.

Потрібно знайти максимальну величину потоку (кількості машин, рідини, сировини тощо), який може увійти до мережі та вийти з неї за заданий період часу. Для розв'язання задачі про максимальний потік використовують метод Форда - Фалкерсона. В ***Maple*** задача про максимальний потік розв'язується за допомогою функції

MaxFlow (G, s, t)

де ***G*** – зважений граф;
s – вершина, що є джерелом графа;
t – вершина, що є стоком графа.

Подамо задачу про максимальний потік як задачу лінійного програмування. Припустимо, що потрібно знайти максимальний потік між джерелом *s* та стоком *t*. Позначимо:
x_{ij} – величина потоку, що проходить по дузі (i, j);
c_{ij} – пропускна здатність цієї дуги.

Для кожної проміжної вершини записується обмеження, що задає баланс потоку, який проходить через дану вершину:

загальний вхідний потік = загальний вихідний потік.

Для кожної дуги записується обмеження, що потік не перевищує пропускної здатності дуги та є невід'ємним:

0 ≤ потік по дузі ≤ пропускна здатність дуги.

Функцією мети, яку потрібно максимізувати, є величина потоку, що виходить з джерела *s* або входить у сток *t*.

Приклад 1. Мережа автодоріг, що проходять через Львівську область, може забезпечити пропускні здатності (тис. автомашин за годину), які вказані на рис.1. Потрібно визначити максимальний потік у заданій мережі.

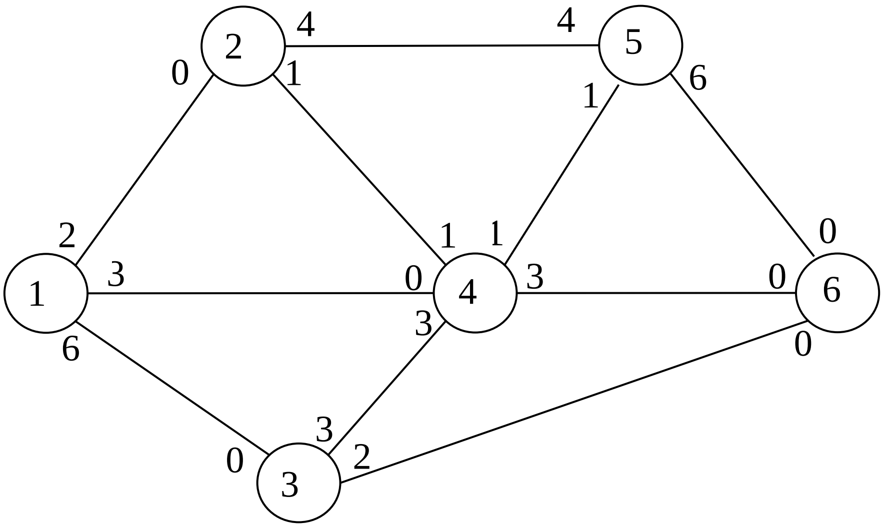


Рис. 1.

Розв'язання:

Розв'яжемо задачу в пакеті ***Maple***.

> *restart* :

> *with*(*GraphTheory*) :

Задаємо матрицю пропускних здатностей

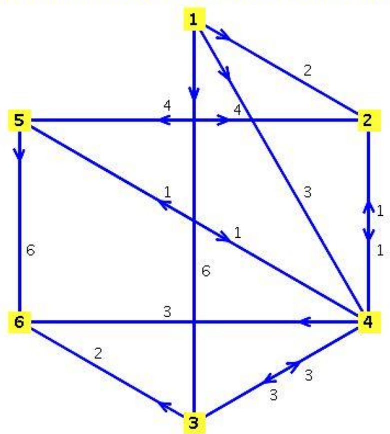
$$> A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Задаємо орієнтований зважений граф, що відповідає матриці A та будуємо його

> $N := Digraph(A, weighted); DrawGraph(N);$

N := Graph 1: a directed weighted graph with 6 vertices and 14 arc(s)



Шукаємо максимальний потік від вершини 1 до вершини 6

```
> MaxFlow(N, 1, 6);
```

$$9, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Отримали величину максимального потоку $F_{\max} = 9$ та матрицю величин потоків по кожній дузі.

Запишемо задачу як задачу лінійного програмування. Обмеження для кожної проміжної вершини та функцію мети наведено у таблиці 1. Структура коефіцієнтів, що формують обмеження, має таку особливість: в стовпці, що відповідає змінній x_{ij}, завжди в рядку, що відповідає вершині i стоїть – 1, а в рядку, що відповідає вершині j стоїть +1. Решта коефіцієнтів дорівнюють нулю. Така структура коефіцієнтів типова для мережевих моделей.

Таблиця 1.

Дуги / Вершини	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{36}	x_{42}	x_{43}	x_{45}	x_{46}	x_{52}	x_{54}	x_{56}	Вільні члени
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	
2	1	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	= 0
3	0	1	0	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	0	= 0
4	0	0	1	1	0	1	0	-1	-1	-1	-1	0	1	0	= 0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	= 0
Пропускна здатність d_k	2	6	3	1	4	3	2	1	3	1	3	4	1	6	
Коефіцієнти функції мети F_1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Max
Коефіцієнти функції мети F_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	Max
Оптимальний план	2	4	3	0	3	2	2	1	0	1	3	0	0	4	

Перепозначимо невідомі величини потоків y_k, пропускні здатності дуг d_k, $k = \overline{1, 14}$. Отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$F_1 = y_1 + y_2 + y_3 \to \max \qquad\qquad F_2 = y_7 + y_{11} + y_{14} \to \max$$

$$A \cdot \overline{y} = \overline{0}, \qquad \text{або} \qquad A \cdot \overline{y} = \overline{0},$$

$$0 \le y_k \le d_k, \qquad\qquad 0 \le y_k \le d_k,$$

де A – матриця коефіцієнтів рівнянь - обмежень (2-5-ий рядок, 2-15-ий стовпець табл.3.1.), $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{14})$, $\bar{0} = (0,0,0,0)$, $k = \overline{1,14}$. Розв'язавши задачу засобами пакету ***Maple*** отримуємо оптимальні значення величин потоків $\bar{y} = (2,4,3,0,3,2,2,1,0,1,3,0,0,4)$.

> *restart*;

Підключаємо пакет ***simplex***

> *with*(*simplex*) :

Задаємо функцію мети L та систему обмежень -- нерівностей ***ineq***

> $L := y_1 + y_2 + y_3$; $ineq := \{y_1 - y_4 - y_5 + y_8 + y_{12} = 0, y_2 - y_6 - y_7 + y_9 = 0, y_3 + y_4 + y_6 - y_8 - y_9 - y_{10} - y_{11} + y_{13} = 0, y_5 + y_{10} - y_{12} - y_{13} - y_{14} = 0, y_1 \ge 0, y_1 \le 2, y_2 \ge 0, y_2 \le 6, y_3 \ge 0, y_3 \le 3, y_4 \ge 0, y_4 \le 1, y_5 \ge 0, y_5 \le 4, y_6 \ge 0, y_6 \le 3, y_7 \ge 0, y_7 \le 2, y_8 \ge 0, y_8 \le 1, y_9 \ge 0, y_9 \le 3, y_{10} \ge 0, y_{10} \le 1, y_{11} \ge 0, y_{11} \le 3, y_{12} \ge 0, y_{12} \le 4, y_{13} \ge 0, y_{13} \le 1, y_{14} \ge 0, y_{14} \le 6\}$;

$$L := y_1 + y_2 + y_3$$

$$ineq := \{y_2 - y_6 - y_7 + y_9 = 0, y_1 - y_4 - y_5 + y_8 + y_{12} = 0, y_5 + y_{10} - y_{12} - y_{13} - y_{14} = 0, y_3 + y_4 + y_6 - y_8 - y_9 - y_{10} - y_{11} + y_{13} = 0, 0 \le y_1, 0 \le y_2, 0 \le y_3, 0 \le y_4, 0 \le y_5, 0 \le y_6, 0 \le y_7, 0 \le y_8, 0 \le y_9, 0 \le y_{10}, 0 \le y_{11}, 0 \le y_{12}, 0 \le y_{13}, 0 \le y_{14}, y_1 \le 2, y_2 \le 6, y_3 \le 3, y_4 \le 1, y_5 \le 4, y_6 \le 3, y_7 \le 2, y_8 \le 1, y_9 \le 3, y_{10} \le 1, y_{11} \le 3, y_{12} \le 4, y_{13} \le 1, y_{14} \le 6\}$$

Знаходимо максимум функції L при заданій системі обмежень -- нерівностей ***ineq***

> *maximize*(L, *ineq*)

$$\{y_1 = 2, y_2 = 4, y_3 = 3, y_4 = 0, y_5 = 3, y_6 = 2, y_7 = 2, y_8 = 1, y_9 = 0, y_{10} = 1, y_{11} = 3, y_{12} = 0, y_{13} = 0, y_{14} = 4\}$$

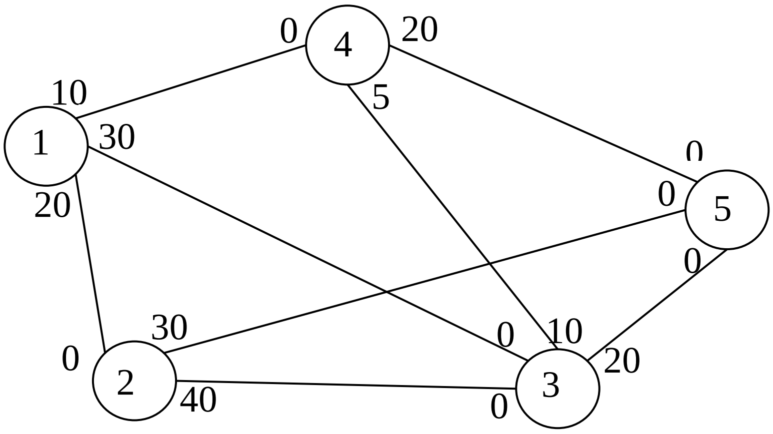
Знаходимо максимальне значення функції L

> *assign*(*maximize*(L, *ineq*)); L;

$$9$$

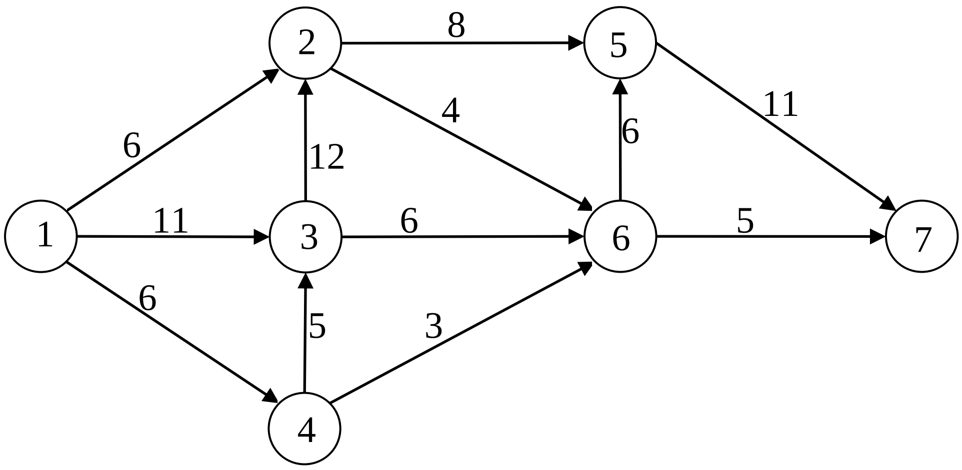
Завдання для самостійного виконання.

1. Знайти максимальний потік між пунктами 1 та 5 у мережі, яка зображена графом.

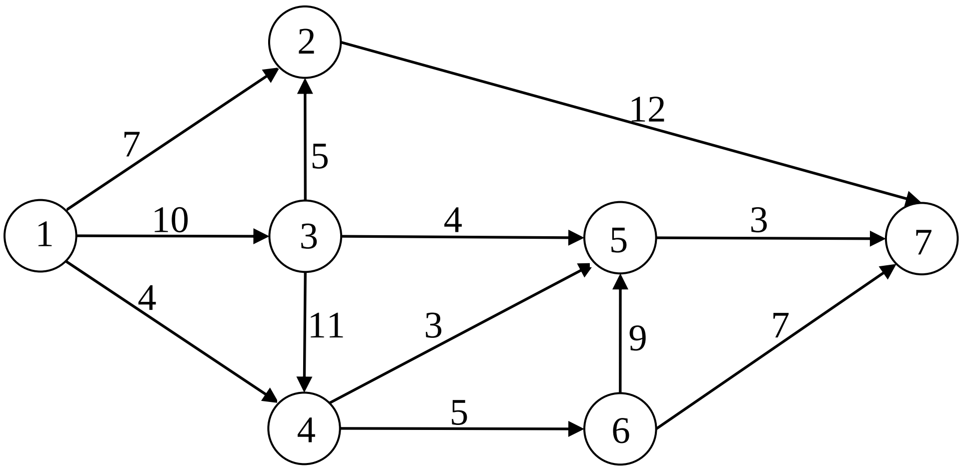


2. На рисунку наведено схему мережі залізниць та пропускну здатність перегонів у потягах. Визначити максимальну кількість потягів, які можна відправити зі станції 1 до станції 7, а також ступінь використання пропускної здатності кожного з перегонів.

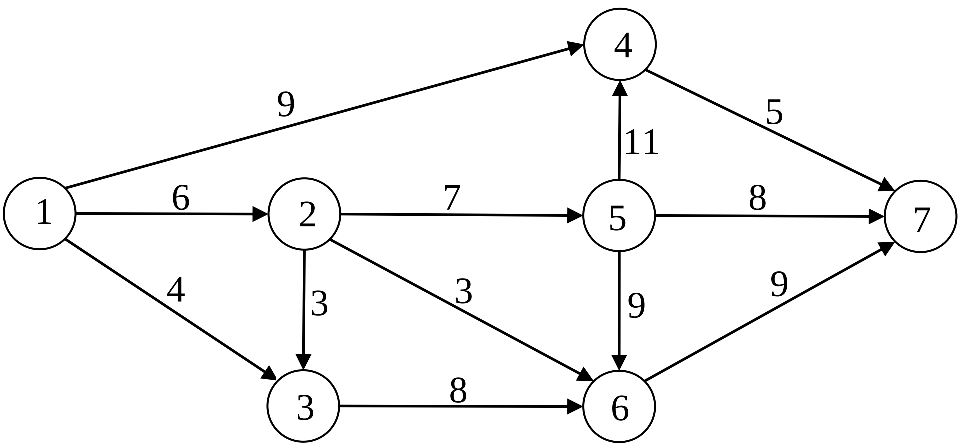
а)



б)



в)



3. Два нафтопереробні заводи транспортують свою продукцію до двох розподільчих терміналів по мережі трубопроводів, яка включає насосні станції. Напрямки потоків у мережі зображені стрілками у графі. Пропускні здатності трубопроводів в мільйонах барелів в день наведено у графі.

Необхідно:

а) розв’язати задачу про максимальний потік у мережі, використовуючи пакет Maple;

б) сформулювати задачу як задачу лінійного програмування для визначення максимального потоку у мережі та розв’язати її у пакеті Maple.