

ТЕМА 8. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ.

План

ТЕМА 8. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ.	1
§ 1. Означення булевої функції. Реалізація функцій формулами.	2
§ 2. Алгебри булевих функцій.	8
§ 3. Спеціальні форми подання булевих функцій.	12
3.1. Диз'юнктивні нормальні форми.	12
3.2. Кон'юнктивні нормальні форми.	15
3.3. Поліном Жегалкіна.	17
Контрольні запитання.	19

Література

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – Л.: “Магнолія – 2006”, 2016. – 432 с.

§ 1. Означення булевої функції. Реалізація функцій формулами.

Означення. Булевою називають функцію $f(x_1, \dots, x_n)$ з областю значень $\{0, 1\}$, змінні $x_1, \dots, x_n$ якої також набувають лише цих двох значень.

Множину всіх булевих функцій позначають P_2 , множину булевих функцій від n змінних – $P_2(n)$.

Означення. Булеву функцію від n змінних називають n -місною. Область її визначення – множина E_2^n усіх двійкових наборів довжиною n . Отже, область визначення n -місної булевої функції скінченна й складається з 2^n наборів.

Для набору $(a_1, \dots, a_n)$ у цьому розділі будемо використовувати позначення a^n або a (якщо довжина набору зрозуміла з контексту).

Означення. Нормою (або вагою) набору a^n називають число $\|a^n\|$, яке дорівнює кількості його одиничних компонент.

Означення. Віддаллю Геммінга між наборами a^n та $\tilde{b}^n$ називають число $\rho(a^n, \tilde{b}^n)$, що дорівнює кількості компонент, у яких набори a^n та $\tilde{b}^n$ різняться.

Означення. Набори a^n та $\tilde{b}^n$ називають сусідніми, якщо $\rho(a^n, \tilde{b}^n) = 1$, і протилежними, якщо $\rho(a^n, \tilde{b}^n) = n$.

Отже, сусідні набори різняться точно однією компонентою, а протилежні – усіма n компонентами.

Приклад 1. Набори (0100) і (1100) – сусідні, а (0100) і (1011) – протилежні.

Скінченність області визначення булевих функцій дає змогу задавати такі функції за допомогою таблиць.

Означення. Розглянемо двійкові набори значень змінних як записи цілих чисел у двійковій системі числення. Це означає, що набір $a^n = (a_1, \dots, a_n)$ ототожнюють із записом числа

$$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n.$$

Назвемо це число *номером набору* a^n .

Приклад 2. Для тримісної булевої функції номер набору 110 – число

$$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 6.$$

Номери наборів значень змінних n - місної булевої функції змінюються від 0 до $2^n - 1$. Розмістимо набори в стовпчик за зростанням їх номерів і покажемо значення функції на кожному наборі. Одержимо *таблицю булевої функції* (табл. 1).

Таблиця 1

$x_1,$	$x_2,$	$\dots$	$x_{n-1},$	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	$\dots$	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0	0	$\dots$	1	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
$\dots$					$\dots$
1	1	$\dots$	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Правий стовпець (стовпець значень функції) складається з 2^n нулів і одиниць. Отже, n -місних булевих функцій стільки, скільки наборів довжиною 2^n з нулів і одиниць. Тому справджується таке твердження.

Теорема 1. Кількість різних булевих функцій від n змінних, дорівнює 2^{2^n} .

Далі ми завжди будемо передбачати розташування наборів у порядку зростання їхніх номерів (від 0 до $2^n - 1$). Тому функцію $f(x^n) = f(x_1, \dots, x_n)$ можна задати вектором $y_f = (y_0, y_1, \dots, y_{2^n-1})$, у якому компонента y_i – це значення функції $f(x^n)$ на i -му наборі значень змінних, де $i = \overline{0, 2^n - 1}$.

Множину наборів, на яких булева функція $f(x^n)$ набуває значення 1, позначають N_f : $N_f = \{a^n \mid a^n \in E_2^n, f(a^n) = 1\}$.

Очевидно, що множина N_f повністю визначає функцію f .

Означення. Змінну x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ називають *істотною*, якщо існує такий набір $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ значень решти змінних, що

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Означення. Змінну, яка не є істотною, називають *неістотною* або *фіктивною*. Отже, змінна x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ неістотна (фіктивна), якщо

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

для будь-яких значень решти змінних.

Це означає, що зміна значення x_i в довільному наборі значень $x_1, \dots, x_n$ не змінює значення функції. Тоді функція $f(x_1, \dots, x_n)$ по суті залежить від $(n - 1)$ змінної, тобто являє собою функцію $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. У такому разі говорять, що функцію g отримано з функції f *вилученням* фіктивної змінної, а функція f отримано з g *введенням* фіктивної змінної.

Означення. Функції f і g називають *рівними*, якщо функцію g можна одержати з f *уведенням* або *вилученням* фіктивних змінних.

Фіктивні змінні вилучають тому, що вони не впливають на значення функції, і з цього погляду зайві. Проте іноді корисно вводити фіктивні змінні. Завдяки цьому будь-яку функцію n змінних можна зробити функцією довільної більшої кількості змінних. Тому можна вважати, що всі функції зі скінченної множини $\{f_1, \dots, f_s\}$ залежать від одних і тих самих змінних $x_1, \dots, x_n$. Зокрема, твердження $|P_2(n)| = 2^{2^n}$ теореми 1 передбачає, що ми враховуємо всі булеві функції від n змінних, включаючи функції з фіктивними змінними.

Зі зростанням кількості змінних швидко збільшується кількість залежних від них булевих функцій.

Приклад 3. Різних булевих функцій чотирьох змінних є $2^{2^4} \approx 65$ тис., а п'яти – $2^{2^5} \approx 4$ млрд.

Зі збільшенням кількості змінних таблиці для булевих функцій стають громіздкими, і ними незручно користуватись.

Розглянемо аналітичний метод подання булевих функцій, тобто подання функцій формулами. Спочатку за допомогою табл. 2 та 3 означають функції, які називають *елементарними*.

Таблиця 2

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблиця 3

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Уведені елементарні функції мають такі назви.

- ♦ $f_1(x) = 0$ – константа 0.
- ♦ $f_2(x) = 1$ – константа 1.
- ♦ $f_3(x) = x$ – тотожна функція.
- ♦ $f_4(x) = \bar{x}$ – заперечення x , читають “не x ”.
- ♦ $f_5(x_1, x_2) = x_1 x_2$ – кон’юнкція, читають “ x_1 і x_2 ” (іноді використовують символи $\wedge$ та $\&$).
- ♦ $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – диз’юнкція, читають “ x_1 або x_2 ”.
- ♦ $f_7(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – імплікація, читають “із x_1 випливає x_2 ” (іноді використовують символ $\supset$).
- ♦ $f_8(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ – еквівалентність (використовують також символ $\equiv$).
- ♦ $f_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – додавання за mod2, читають також як альтернативне “або” (“або, або”).
- ♦ $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ – штрих Шеффера (зауважимо, що $x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$).
- ♦ $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – стрілка Пірса (зауважимо, що $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$).

За допомогою елементарних функцій можна подати будь-яку булеву функцію аналітично, тобто у вигляді формули.

Означення. Нехай задано булеві функції $f(x)$ і $g(x)$. Говорять, що функцію $h(x) = g(f(x))$ отримано підстановкою f у g .

Для багатомісних функцій $f_1, \dots, f_m$, по-перше, можливі будь-які підстановки булевих функцій замість змінних у булеві функції. По-друге, можливі будь-які перейменування змінних, наприклад, перейменування x_3 в x_2 породжує з функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функцію трьох змінних $f(x_1, x_2, x_2, x_4)$ (у такому разі кажуть, що змінні x_2 та x_3

ототожнено).

Означення. Функцію, яку одержано з $f_1, \dots, f_m$ деякою підстановкою їх одна в одну й перейменуванням змінних, називають *суперпозицією* $f_1, \dots, f_m$.

Означення. Вираз, який описує цю суперпозицію та містить функціональні знаки, круглі дужки й символи змінних, називають *формулою*.

Поняття суперпозиції є дуже важливим, тому розглянемо його докладніше.

Означення. Нехай задано множину елементарних функцій $Q = \{f_1, \dots, f_m\}$. Символи змінних $x_1, \dots, x_n$ вважають *формулами глибиною 0*.

Означення. Формула F має *глибину* $k + 1$, якщо вона має вигляд $F = f_i(F_1, \dots, F_{n_i})$, де $f_i \in Q$, n_i – кількість аргументів f_i , а $F_1, \dots, F_{n_i}$ – формули, максимальна з глибин яких дорівнює k .

Означення. $F_1, \dots, F_{n_i}$ називають *підформулами* F ; f_i називають *зовнішньою* (або *головною*) операцією формули F .

Усі підформули формул $F_1, \dots, F_{n_i}$ також називають *підформулами* F .

Приклад 4. $f_5(x_1, x_2)$ – це формула глибиною 1, а $f_9(f_6(x_3, x_1), f_5(x_1, f_9(x_1, x_2)))$ – формула глибиною 3, яка містить одну підформулу глибиною 2 (тобто, $f_5(x_1, f_9(x_1, x_2))$) і дві підформули глибиною 1 (тобто, $f_6(x_3, x_1)$, $f_9(x_1, x_2)$).

Надалі будемо розглядати конкретні формули в більш звичному вигляді, коли знаки функцій стоять між аргументами (такий запис називають *інфіксним*).

Приклад 5. Якщо f_5 – кон'юнкція, f_6 – диз'юнкція, f_9 – додавання за mod2, то наведена вище формула має вигляд $(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2))$. Цю тримісну функцію подано не таблицею, а формулою. Вона являє собою суперпозицію функцій f_5 , f_6 та f_9 .

Означення. Формулу, побудовану описаним вище способом, тобто таку, що містить лише символи змінних, дужки та знаки функцій із множини Q , називають *формулою над Q* .

Приклад 6. Нехай $Q = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$, тоді вираз $\overline{(x \vee y)z} \vee t$ – формула над Q .

Щоб зменшити кількість дужок у формулах, вводять **пріоритет операцій**:

- ♦ заперечення;
- ♦ кон'юнкція;
- ♦ усі інші операції.

Крім того, домовляються, що *символ заперечення відіграє роль дужок, якщо він міститься над частиною формули.*

Можна й інакше означити поняття глибини. Наприклад, часто вважають, що розставлення заперечень над змінними не збільшує глибини. Коли Q містить асоціативну операцію f , можна визначити глибину так, що застосування f до формул з тою самою зовнішньою операцією f не збільшує глибини формули.

Приклад 7. Формули $x_1(x_2 \vee x_3x_4)$ та $x_2x_1(x_2 \vee x_3x_4)$ мають одну й ту саму глибину 3; диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми завжди мають глибину 2.

Будь-яка формула, яка виражає функцію f як суперпозицію функцій, подає спосіб її обчислення. Цей спосіб визначено таким очевидним правилом: *формулу можна обчислити, лише тоді, коли вже обчислено значення всіх її підформул.*

Отже, *формула кожному набору значень аргументів ставить у відповідність значення функції, і відтак може слугувати способом подання й обчислення функції.* Зокрема, за формулою обчисленням її значень на всіх 2^n наборах можна відновити таблицю функції. Про формулу, що подає функцію, кажуть також, що вона *реалізує* або *зображає* цю функцію.

Приклад 8. Функцію подано формулою $\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$. Потрібно подати її таблицею. Процес розв'язування цієї задачі проілюстровано в табл. 4.

Таблиця 4

x	y	z	xz	$y \oplus xz$	$\bar{z}$	$\bar{z} \sim (y \oplus xz)$	$\bar{x}$	$\bar{x} \rightarrow (\bar{z} \sim (y \oplus xz))$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Подання функції формулою не єдине.

Означення. Формули називають *еквівалентними* (або *тотожними*,

рівносильними), якщо вони реалізують рівні булеві функції. Еквівалентність формул позначають символом $=$.

Приклад 9. Формули $x \rightarrow y$ та $(\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$ еквівалентні: $x \rightarrow y = (\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$. У цьому можна переконатись, побудувавши таблиці відповідних булевих функцій. Очевидно, що змінна z у другій формулі фіктивна.

Означення. Крім побудови таблиць є й інші методи доведення еквівалентності формул і побудови нових формул, рівносильних даним. Ці методи називають *рівносильними (еквівалентними) перетвореннями формул*.

§ 2. Алгебри булевих функцій.

Нехай функцію f_1 задано формулою F_1 , а функцію f_2 – формулою F_2 . Підстановка F_1 та F_2 , наприклад, у диз'юнкцію $x_1 \vee x_2$ дає формулу $F_1 \vee F_2$. Узявши формулу Φ_1 , рівносильну F_1 (тобто Φ_1 також подає функцію f_1) та формулу Φ_2 , рівносильну F_2 , то отримаємо формулу $\Phi_1 \vee \Phi_2$, рівносильну формулі $F_1 \vee F_2$.

Отже, диз'юнкцію можна розглядати як двомісну операцію на множині всіх булевих функцій. Ця операція кожній парі функцій f_1 і f_2 , незалежно від вигляду формул, якими їх подано, однозначно ставить у відповідність функцію $f_1 \vee f_2$. Аналогічно, й інші булеві функції можна розглядати як операції на множині P_2 усіх булевих функцій.

Приклад 10. Заперечення – одномісна операція, кон'юнкція та диз'юнкція – двомісні.

Означення. Множину P_2 всіх булевих функцій разом з уведеною на ній системою операцій називають *алгеброю булевих функцій*.

Розглянемо дві алгебри.

Означення. Алгебру $(P_2; \neg, \wedge, \vee)$ з операціями заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції називають *алгеброю Буля*, а алгебру $(P_2; \wedge, \oplus)$ з операціями кон'юнкції та додавання за mod2 – *алгеброю Жегалкіна*.

Формули цих алгебр будують зі знаків операцій, круглих дужок, букв $x, y, z, \dots$ і констант 0 та 1.

Букви позначають довільні булеві функції, при цьому булеві змінні розглядають як окремий випадок булевих функцій.

Знак кон'юнкції $\wedge$ у формулах обох алгебр зазвичай не пишуть.

Якщо немає дужок, пріоритет операцій у булевій алгебрі такий:

- заперечення,
- кон'юнкція,
- диз'юнкція.

У булевій алгебрі як дужки в разі заперечення виразів використовують сам символ заперечення.

В алгебрі Жегалкіна спочатку виконується кон'юнкція, а потім – додавання за mod2. За наявності дужок спочатку виконуються операції всередині їх.

Приклад 11. Замість $\overline{(x \vee y)} \vee (xy)$ можна написати $\overline{x \vee y} \vee xy$, а замість $(xy) \oplus (yz)$ – $xy \oplus yz$.

Одна з найважливіших задач – виявлення основних еквівалентностей в алгебрах. Ці еквівалентності називають *законами* відповідної алгебри.

Закони алгебри Буля:

- ♦ закони комутативності $xy = yx$, $x \vee y = y \vee x$;
- ♦ закони асоціативності $(xy)z = x(yz) = xyz$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$;
- ♦ закони дистрибутивності $(x \vee y)z = xz \vee yz$, $xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$;
- ♦ закон подвійного заперечення $\overline{\overline{x}} = x$;
- ♦ закони ідемпотентності $xx = x$, $x \vee x = x$;
- ♦ закони де Моргана $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \overline{y}$;
- ♦ закони поглинання $x \vee xy = x$, $x(x \vee y) = x$;
- ♦ співвідношення для констант $\overline{1} = 0$, $\overline{0} = 1$, $1x = x$, $0x = 0$, $1 \vee x = 1$, $0 \vee x = x$;
- ♦ закон виключеного третього $x \vee \overline{x} = 1$;
- ♦ закон протиріччя $x\overline{x} = 0$.

Закони алгебри Жегалкіна:

- ♦ закони асоціативності $(xy)z = x(yz) = xyz$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$;
- ♦ закони комутативності $xy = yx$, $x \oplus y = y \oplus x$;
- ♦ дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо додавання за mod2 $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$;

- ♦ співвідношення для констант $1x = x$, $0x = 0$, $x \oplus 0 = x$;
- ♦ закон ідемпотентності для кон'юнкції $xx = x$;
- ♦ закон зведення подібних членів у разі додавання за mod2 $x \oplus x = 0$.

Правильність цих еквівалентностей можна довести за допомогою таблиць.

Наведені еквівалентності справджуються й у разі підстановки замість змінних довільних булевих функцій (тобто формул, які подають ці функції). Важливо лише дотримуватися такого правила підстановлення формули замість змінної: підставляючи формулу F замість змінної x , усі входження змінної x у цю еквівалентність потрібно водночас замінити формулою F .

Приклад 12. Підставивши замість змінної x формулу xu , а замість змінної y – формулу $z \vee u$, з $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ отримаємо $\overline{xu(z \vee u)} = \overline{xu} \vee \overline{z \vee u}$.

Закони алгебр Буля та Жегалкіна дають змогу доводити нові еквівалентності вже без таблиць, на основі тотожних перетворень.

Приклад 13. Доведемо, що

- а) $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu$;
- б) $xu \vee zu = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

Двічі застосувавши закони дистрибутивності, одержимо

- а) $(x \vee y)(z \vee u) = (x \vee y)z \vee (x \vee y)u = xz \vee yz \vee xu \vee yu$.
- б) $xu \vee zu = (x \vee zu)(y \vee zu) = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee u)(y \vee u)$.

Приклад 14. Доведемо, що $\overline{\overline{xzy}} = x \vee \overline{z} \vee \overline{y}$.

Послідовно застосувавши закони де Моргана, подвійного заперечення, запишемо $\overline{\overline{xzy}} = \overline{xz} \vee \overline{y} = \overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{y} = x \vee \overline{z} \vee \overline{y}$.

Наведемо **еквівалентності**, які дають змогу перетворити будь-яку формулу булевої алгебри в рівносильну до неї формулу алгебри Жегалкіна й навпаки:

- ♦ $\overline{x} = 1 \oplus x$;
- ♦ $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$;
- ♦ $x \oplus y = \overline{xy} \vee x\overline{y}$.

За допомогою законів алгебр Буля та Жегалкіна можна спрощувати різні формули в цих алгебрах.

Приклад 15. Перетворимо $\overline{xy \vee z}$ у рівносильну формулу алгебри Жегалкіна. Одержану формулу спростимо

$$\begin{aligned}\overline{xy \vee z} &= (xy \vee (z \oplus 1)) \oplus 1 = (xy \oplus (z \oplus 1) \oplus xy(z \oplus 1)) \oplus 1 = \\ &= xy \oplus z \oplus 1 \oplus xyz \oplus xy \oplus 1 = xy \oplus z.\end{aligned}$$

Приклад 16. Виразимо $x \rightarrow y$ та $x \sim y$ через операції алгебри Буля.

Оскільки $x \sim y = (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$, то достатньо виразити $x \rightarrow y$. Порівняємо таблицю для $x \rightarrow y$ з таблицею для $\bar{x} \vee y$. Скориставшись тим, що в обох таблицях є єдиний набір, для якого значення функції дорівнює 0, отримаємо еквівалентність $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$.

Розглянемо тепер ще одне важливе поняття.

Означення. Функцію $f^*(x_1, \dots, x_n)$ називають *двоїстою* до функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Візьмемо заперечення над обома частинами рівності й підставимо $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ замість $x_1, \dots, x_n$, тоді одержимо $\bar{f}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bar{\bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = f(x_1, \dots, x_n)$. Звідси випливає, що функція f двоїста до f^* , тобто $(f^*)^* = f$.

Пари двоїстих функцій утворюють, наприклад, кон'юнкція та диз'юнкція, константи 0 та 1, додавання за mod2 та еквівалентність.

Таблицю для двоїстої функції у разі вибраного нами порядку наборів отримують із таблиці для функції $f(x_1, \dots, x_n)$ інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і 1 на 0) стовпчика функції та його перевертанням.

З означення двоїстості зрозуміло, що для довільної функції двоїста функція визначається однозначно.

Означення. Функція може бути двоїстою до самої себе, тоді її називають *самодвоїстою*.

Приклад 17. Заперечення $\bar{x}$ та функція $x \oplus y \oplus z$ – самодвоїсті функції.

Нехай функцію задано формулою F . Який вигляд має формула F^* , що задає двоїсту функцію? Відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема 2. Якщо $F(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_n))$, то

$$F^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s^*(x_1, \dots, x_n)).$$

$$\begin{aligned}
& \text{Доведення. } F^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{F}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f}(f_1(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, f_s(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) = \\
& = \overline{f}(\overline{f_1}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \dots, \overline{f_s}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})) = \overline{f}(\overline{f_1}^*(x_1, \dots, x_n), \dots, \overline{f_s}^*(x_1, \dots, x_n)) = \\
& = f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_s^*(x_1, \dots, x_n)).
\end{aligned}$$

З теореми випливає таке твердження.

Принцип двоїстості. Якщо у формулі F , що подає функцію f , усі символи функцій замінити символами відповідних двоїстих функцій, то одержана формула F^* подає функцію f^* , двоїсту до f .

Інакше це твердження можна сформулювати так: *функція, двоїста до суперпозиції функцій, дорівнює відповідній суперпозиції двоїстих функцій.*

В алгебрі Буля принцип двоїстості має простіший вигляд.

Принцип двоїстості в алгебрі Буля. Якщо у формулі F , що реалізує функцію f , усі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, диз'юнкції – на кон'юнкції, 1 – на 0, 0 – на 1, то отримаємо формулу F^* , яка реалізує функцію f^* , двоїсту до f .

Приклад 18. Знайдемо функцію, двоїсту до $f(x, y, z, u) = xy \vee \bar{z}(x \vee \bar{u})$.

За принципом двоїстості матимемо $f^*(x, y, z, u) = (x \vee y)(\bar{z} \vee x(\bar{u} \vee y))$. Застосовуючи принцип двоїстості, слід урахувувати пріоритет операцій, тобто в разі потреби розставляти дужки. Так, у формулі $xy \vee \bar{z}(x \vee \bar{u})$ спочатку виконуються кон'юнкції xy та $\bar{u}$ (дужки випущено за домовленістю про пріоритет операцій); отже, у формулі, що реалізує двоїсту функцію, спочатку мають виконуватися диз'юнкції $x \vee y$ та $\bar{u} \vee y$ (відповідна суперпозиція двоїстих функцій), тому потрібні дужки.

Якщо функції рівні, то й двоїсті до них функції також рівні. Це дає змогу отримувати нові еквівалентності за допомогою принципу двоїстості. Для цього потрібно від еквівалентності $F_1 = F_2$ перейти до $F_1^* = F_2^*$.

§ 3. Спеціальні форми подання булевих функцій.

Спеціальними формами подання булевих функцій є *диз'юнктивні нормальні форми* й *кон'юнктивні нормальні форми* та *поліном Жегалкіна*.

3.1. Диз'юнктивні нормальні форми.

Уведемо позначення $x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$, де σ – параметр, який дорівнює 0 чи 1.

Очевидно, що $x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \text{якщо } \sigma = 0, \\ x, & \text{якщо } \sigma = 1. \end{cases}$ Зазначимо, що $\sigma^\sigma = 1$.

Зафіксуємо множину змінних $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Означення. Елементарною кон'юнкцією називають вираз $k = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$, де x_{i_j} ($j = \overline{1, r}$) – змінні з множини X , причому всі x_{i_j} різні. Число r називають *рангом* кон'юнкції. Якщо $r = 0$, кон'юнкцію називають *порожньою* та вважають такою, що дорівнює 1.

Приклад 19. Елементарними кон'юнкціями є 1, $\bar{x}_1$, $x_1 x_2$, x_2 , $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, а вирази 0, $x_1 x_2 x_1$, $\bar{x}_1 x_1$, $\overline{x_1 x_2}$ не є елементарними кон'юнкціями.

Означення. Елементарну кон'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X , називають *конституентою одиниці*.

Інакше кажучи, конституента одиниці – це елементарна кон'юнкція з рангом n . Очевидно, що всіх різних конституент одиниці для фіксованої множини n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ стільки, скільки двійкових наборів з n компонентами, тобто 2^n .

Означення. Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називають диз'юнкцію $D = k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_s$ елементарних кон'юнкцій k_j ($j = \overline{1, s}$), у якій k_j попарно різні.

Алгоритм знаходження ДНФ з формули булевої алгебри на основі тотожних перетворень:

1 етап. Формулу булевої алгебри перетворюємо у рівносильну, побудовану зі змінних та їх заперечень за допомогою самих лише кон'юнкцій та диз'юнкцій (тобто заперечення можуть стояти лише над змінними). Для цього використовуємо закони де Моргана $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$ та закон подвійного заперечення $\overline{\bar{x}} = x$.

2 етап. Домагаємося, щоб усі кон'юнкції виконувались раніше, ніж диз'юнкції, для чого розкриваємо дужки на підставі дистрибутивного закону для кон'юнкції $(x \vee y)z = xz \vee yz$ або тотожності $(x \vee y)(z \vee u) = xz \vee yz \vee xu \vee yu$.

3 етап. Далі з використанням співвідношень для констант і закону суперечності вилучаємо нулі та, виходячи із законів ідемпотентності $xx = x$, $x \vee x = x$, об'єднуємо рівні члени.

На цьому процес отримання ДНФ закінчують.

Приклад 20. Приведемо $\overline{\overline{xy \vee \bar{z} \vee x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{y}}}$ до ДНФ. Застосовуючи сформульований алгоритм, можемо записати

$$\begin{aligned}\overline{\overline{xy \vee \bar{z} \vee x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{y}}} &= \overline{\overline{xy \vee \bar{z} \vee x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{y}}} = (xy \vee \bar{z})\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} = \\ &= xy\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} = x\bar{x}y\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{z} \vee \bar{y} = 0\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} = \\ &= 0 \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}.\end{aligned}$$

Зазначимо, що ДНФ булевої функції не єдина, наприклад, $xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}$.

Означення. Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називають ДНФ, у якій кожна елементарна кон'юнкція k_j ($j = \overline{1, s}$) – конституента одиниці.

Теорема 3. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ можна єдиним способом подати в ДДНФ.

Для функції, заданої таблицею, ДДНФ будують так: для кожного набору, на якому функція приймає значення 1, знаходять відповідну йому конституенту одиниці; диз'юнкція всіх цих конституент – це ДДНФ даної функції.

Приклад 21. Побудуємо ДДНФ для функції, заданої табл. 5.

Таблиця 5

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Функція набуває значення 1 на наборах (00) і (11), отже $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2$.

Будь-яку ДНФ можна звести до ДДНФ розщепленням кон'юнкцій, які містять не всі змінні: якщо кон'юнкція k не містить змінної x , то

$$k = k(x \vee \bar{x}) = kx \vee k\bar{x}.$$

Приклад 22. Перетворимо диз'юнктивну нормальну форму $\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}yz$ у досконалу.

Застосувавши розщеплення для кон'юнкції $\bar{x}\bar{z}$, одержимо

$$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz.$$

Якщо із формули F_1 за допомогою деяких тотожних перетворень можна отримати формулу F_2 , то із F_2 можна отримати F_1 , обернувши ці перетворення.

Теорема 4. Для довільних двох тотожних формул алгебри Буля F_1 та F_2 існує еквівалентне перетворення F_1 в F_2 за допомогою законів цієї алгебри.

Доведення. Перетворимо F_1 і F_2 на ДДНФ. Оскільки формули F_1 і F_2 тотожні, то їх ДДНФ однакові. Обернувши друге перетворення, матимемо такий ланцюжок перетворень: з F_1 одержимо ДДНФ, з ДДНФ одержимо F_2 .

Важливість цієї теореми полягає в тому, що законів алгебри Буля виявляється достатньо для довільних еквівалентних перетворень у цій алгебрі.

3.2. Кон'юнктивні нормальні форми.

Двоїтим способом, замінюючи в означеннях нулі одиницями й навпаки, диз'юнкції кон'юнкціями й навпаки, означають поняття елементарної диз'юнкції, конституенти нуля, кон'юнктивної нормальної форми, досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

Нехай, як і раніше, зафіксовано множину змінних $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Означення. Елементарною диз'юнкцією називають вираз $d = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, у якому всі x_{i_j} різні, $x_{i_j} \in X$. Число r називають *рангом* диз'юнкції. Якщо $r = 0$, диз'юнкцію називають *порожньою* та вважають такою, що дорівнює 0.

Приклад 23. Елементарними диз'юнкціями є $x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_7$, 0, $\bar{x}_1 \vee x_2$.

Означення. Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називають кон'юнкцію $d_1 \wedge d_2 \wedge \dots \wedge d_s$ елементарних диз'юнкцій d_j , у якій усі d_j різні.

Алгоритм знаходження КНФ з формули булевої алгебри на основі тотожних перетворень:

1 етап. Цей етап такий самий, як і для побудови ДНФ.

2 етап. Домагаємося, щоб усі диз'юнкції виконувалися раніше кон'юнкцій. Для цього потрібно скористатися дистрибутивним законом $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ або наслідком із нього $xu \vee zu = (x \vee z)(x \vee u)(y \vee z)(y \vee u)$.

3 етап. На підставі співвідношень для констант і закону виключеного третього $x \vee \bar{x} = 1$ вилучаємо одиниці та на підставі законів ідемпотентності $xx = x$, $x \vee x = x$ об'єднуємо рівні члени.

Приклад 24. Знайдемо КНФ для формули $\overline{\overline{xy}}(x \rightarrow yz)$. Використовуючи сформульований алгоритм, одержимо

$$\overline{\overline{xy}}(x \rightarrow yz) = \overline{\overline{xy}}(\overline{x} \vee yz) = (\overline{x} \vee \overline{y})(\overline{x} \vee yz) = (\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee z) = (\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee z).$$

Означення. Елементарну диз'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X , називають *конституентою нуля*. Інакше кажучи, конституента нуля – це елементарна диз'юнкція з рангом n .

Кожному двійковому набору $\tilde{b}^n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ взаємно однозначно відповідає конституента нуля $x_1^{\tilde{b}_1} \vee x_2^{\tilde{b}_2} \vee \dots \vee x_n^{\tilde{b}_n}$, яка перетворюється на ньому в 0. Усі інші конституенти нуля на цьому наборі перетворюються в 1. Наприклад, набору 0111 відповідає конституента нуля $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$.

Означення. Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називають КНФ, у якої кожна елементарна диз'юнкція d_j ($j = \overline{1, s}$) – конституента нуля.

ДКНФ за таблицею булевої функції f будують так: *виділяють набори, на яких функція набуває значення 0, і для кожного з них записують відповідну конституенту нуля. Кон'юнкція цих конституент нуля являє собою ДКНФ функції f .*

Приклад 25. Побудуємо ДКНФ для функції, заданої табл. 5. Функція набуває значення 0 на наборах (01) та (10), отже $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2)$.

Зазначимо, що за допомогою тотожних перетворень будь-яку КНФ можна перетворити на ДКНФ. Якщо в якусь елементарну диз'юнкцію d не входить змінна x , то потрібно записати рівносильний вираз

$$d \vee x\overline{x}$$

та застосувати дистрибутивний закон: $d \vee x\overline{x} = (d \vee x)(d \vee \overline{x})$. Після тривіальних перетворень отримаємо ДКНФ.

Приклад 26. Перетворимо КНФ $\overline{\overline{xz}}(\overline{x} \vee y)$ у ДКНФ. Використовуючи розщеплення диз'юнкцій, можемо записати

$$\overline{\overline{xz}}(\overline{x} \vee y) = (\overline{x} \vee y\overline{y} \vee z\overline{z})(\overline{x}\overline{x} \vee y\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z\overline{z}) =$$

$$= (\overline{x} \vee (y \vee z)(y \vee \overline{z})(\overline{y} \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})) \wedge$$

$$\wedge ((x \vee y)(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y}) \vee \overline{z}) \wedge$$

$$\begin{aligned}
& \wedge (\bar{x} \vee (y \vee z)(y \vee \bar{z})) = \\
& = (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge \\
& \quad \wedge (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge \\
& \quad \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \\
& = (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).
\end{aligned}$$

Зазначимо, що досконала кон'юнктивна нормальна форма єдина.

3.3. Поліном Жегалкіна.

Означення. Елементарну кон'юнкцію називають *монотонною*, якщо вона не містить заперечень змінних.

Приклад 27. $x_1 x_2 x_3$, x_1 , 1 – монотонні кон'юнкції.

Означення. Формулу $P(x^n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_s$, де $k_1, k_2, \dots, k_s$ – попарно різні монотонні кон'юнкції змінних із множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, називають *поліномом Жегалкіна*.

Означення. Найбільший із рангів елементарних кон'юнкцій, що входять у поліном, називають *степенем* полінома. За окремим означенням 0 також уважатимемо поліномом Жегалкіна.

Приклад 28. Формули x , 1 , $xyz \oplus xy \oplus z \oplus 1$ – поліноми Жегалкіна, а xx , $xy \oplus ux \oplus x \oplus 1$ – ні.

Щоб із будь-якої формули алгебри Жегалкіна одержати поліном Жегалкіна, достатньо розкрити дужки (за дистрибутивним законом $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$), застосувати, якщо можливо, закон ідемпотентності для кон'юнкції $xx = x$ та звести подібні члени.

Теорема 5. Будь-яку булеву функцію можна єдиним способом подати поліномом Жегалкіна.

Розглянемо методи побудови полінома Жегалкіна.

Метод невизначених коефіцієнтів. Для функції $f(x_1, \dots, x_n)$ записують найбільш загальний вигляд полінома Жегалкіна $P(x_1, \dots, x_n)$ з невизначеними коефіцієнтами (їх 2^n).

Зокрема, поліном від двох змінних має загальний вигляд

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3xy,$$

а від трьох змінних –

$$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1x \oplus c_2y \oplus c_3z \oplus c_4xy \oplus c_5xz \oplus c_6yz \oplus c_7xyz.$$

Для кожного двійкового набору $(a_1, \dots, a_n)$ значень змінних записують рівняння $f(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_n)$. Таких рівнянь буде 2^n ; розв'язавши їх, отримують коефіцієнти полінома $P(x_1, \dots, x_n)$.

Приклад 29. Побудуємо поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \sim y$. Прирівняємо значення функції та полінома на всіх чотирьох наборах значень змінних і одержимо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів

$$f(0, 0) = 1 = c_0,$$

$$f(0, 1) = 0 = c_0 \oplus c_2,$$

$$f(1, 0) = 0 = c_0 \oplus c_1,$$

$$f(1, 1) = 1 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3.$$

Розв'язавши її, визначаємо, що $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ й, отже, $x \sim y = 1 \oplus x \oplus y$.

Побудова полінома Жегалкіна на основі рівносильних перетворень. Один із способів побудови полінома Жегалкіна полягає в наступному. Спочатку будують рівносильну формулу, у якій є лише операції кон'юнкції та заперечення, а потім заміняють всюди $\bar{x}$ на $1 \oplus x$. Після цього тривіальними перетвореннями отримують поліном Жегалкіна.

Приклад 30. Побудуємо поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \rightarrow y$. Використовуючи введені раніше тотожності, одержимо

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = 1 \oplus x(1 \oplus y) = 1 \oplus x \oplus xy.$$

Теорема 6. Усі змінні булевої функції, які входять у її поліном Жегалкіна, істотні.

Доведення. Нехай змінна x_1 уходить у поліном Жегалкіна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Згрупуємо члени, які містять x_1 , і винесемо x_1 за дужки:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 f_1(x_2, \dots, x_n) \oplus f_2(x_2, \dots, x_n).$$

Функція $f_1(x_2, \dots, x_n) \neq 0$, оскільки в протилежному випадку змінна x_1 не входила б у поліном для функції f (унаслідок єдиності полінома Жегалкіна). Нехай на наборі $(a_2, \dots, a_n)$ значення функції f_1 дорівнює 1. Тоді $f_1(x_1, a_2, \dots, a_n) = x_1 \oplus \sigma$, де

$\sigma = f_2(a_2, \dots, a_n)$. Отже, зміна значення x_1 тоді, коли значення решти змінних задано набором $(a_2, \dots, a_n)$, змінює значення функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Звідси випливає, що змінна x_1 істотна.

Контрольні запитання

1. Дати означення булевої функції.
2. Що називають нормою (вагою) набору?
3. Дати визначення віддалі Геммінга.
4. Які набори називають сусідніми, протилежними?
5. Яку змінну булевої функції називають істотною, неістотною?
6. Дати визначення суперпозиції функцій.
7. Які існують алгебри булевих функцій?
8. Як визначають алгебру Буля та алгебру Жегалкіна?
9. Сформулювати закони алгебри Буля.
10. Сформулювати закони алгебри Жегалкіна.
11. Яку функцію називають двоїстою?
12. Що називають елементарною кон'юнкцією? Що називають конституентою одиниці?
13. Дати визначення диз'юнктивної нормальної форми.
14. Що називають досконалою диз'юнктивною нормальною формою?
15. Що називають елементарною диз'юнкцією? Що називають конституентою нуля?
16. Дати визначення кон'юнктивної нормальної форми.
17. Що називають досконалою кон'юнктивною нормальною формою?
18. Яку елементарну кон'юнкцію називають монотонною?
19. Дати визначення поліному Жегалкіна.
20. Описати основні методи побудови поліному Жегалкіна.

Розробила
доцент кафедри прикладної математики і механіки
к. ф.-м. наук

Чмир О.Ю.