КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ТЕМА 9. *ГРАФИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.*

План

ТЕМА 9. ГРАФИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. 1
§ 1. Основні означення та властивості. 2
§ 2. Деякі спеціальні класи простих графів. 8
§ 3. Способи подання графів. 11
3.1. Матриця інцидентності. 11
3.2. Матриця суміжності. 13
3.3. Подання графа списком пар (списком ребер). 14
3.4. Подання графа списками суміжності. 15
Контрольні запитання 16

Література

1. *Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М.* Дискретна математика. – Л.: “Магнолія – 2006”, 2016. – 432 с.

Теорія графів – одна з істотних частин математичного апарату інформатики та кібернетики. У термінах теорії графів можна сформулювати багато задач, пов'язаних із дискретними об'єктами. Такі задачі виникають у проектуванні інтегральних схем, схем управління, у дослідженні автоматів, в економіці й статистиці, теорії розкладів і дискретній оптимізації.

§ 1. Основні означення та властивості.

Термін "граф" уперше з'явився в книзі видатного угорського математика Д. Кеніга 1936р., хоча перші задачі теорії графів пов'язані ще з іменем Л. Ейлера (XVIII ст.).

Означення. *Простим графом* називають пару $G = (V, E)$, де V – непорожня скінченна множина елементів, називаних *вершинами*, E – множина невпорядкованих пар різних елементів з V. Елементи множини E (невпорядковані пари різних вершин) називають *ребрами.*

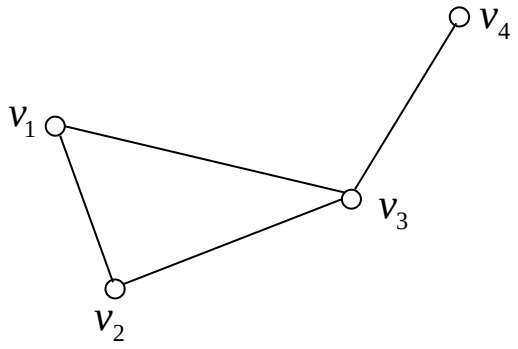


Рис. 1

Приклад 1. На рис. 1 зображено простий граф G з множиною вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ і множиною ребер $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$.

Говорять, що ребро $\{u, v\}$ *з'єднує* вершини u та v. Оскільки E – множина, то в простому графі пару вершин може з'єднувати не більше ніж одне ребро.

Іноді розглядають графи, у яких дві вершини можуть бути з'єднані більше ніж одним ребром. Так виникає поняття мультиграфа.

Означення. *Мультиграфом* називають пару (V, E), де V – скінченна непорожня множина вершин, а E – *сім'я* невпорядкованих пар різних елементів з множини V. Тут застосовано термін "сім'я" замість "множина", бо елементи в E (ребра) можуть повторюватись.

Означення. Ребра, що з'єднують одну й ту саму пару вершин, називають

кратними (*паралельними*) ребрами.

Подальше узагальнення полягає в тому, що окрім кратних ребер розглядають ще й петлі.

Означення. *Петлі* – ребра, які з'єднують вершину саму із собою.

Означення. *Псевдографом* називають пару (V, E), де V – скінченна непорожня множина вершин, а E – сім'я невпорядкованих пар не обов' язково різних вершин.

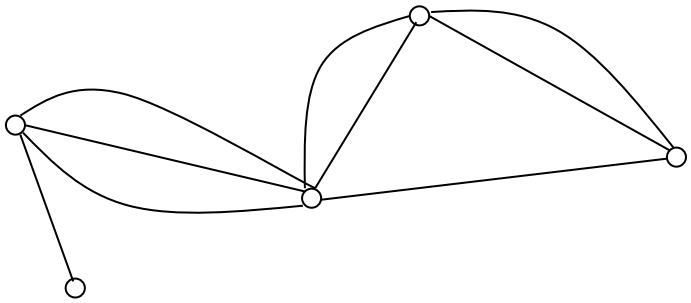


Рис. 2 а)

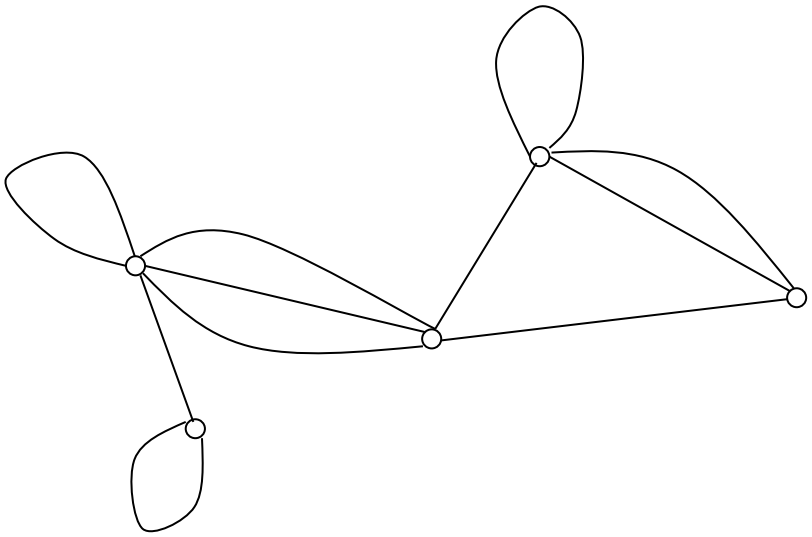


Рис. 2 б)

Приклад 2. На рис. 2 зображено (а) – мультиграф і (б) – псевдограф.

Розглянуті три типи графів називають *неорієнтованими.*

Псевдограф – це найзагальніший тип неорієнтованого графа, бо він може містити петлі й кратні ребра.

Мультиграф – це неорієнтований граф, який може містити кратні ребра, але не може містити петель.

Нарешті, простий граф – це неорієнтований граф без кратних ребер і без петель.

Розглядають також орієнтовані графи.

Означення. *Орієнтованим графом* називають пару (V, E), де V – скінченна непорожня множина вершин, а E – множина впорядкованих пар елементів множини V.

Елементи множини E в орієнтованому графі називають *дугами* (*орієнтованими ребрами*). Дугу (v, v) називають *петлею.*

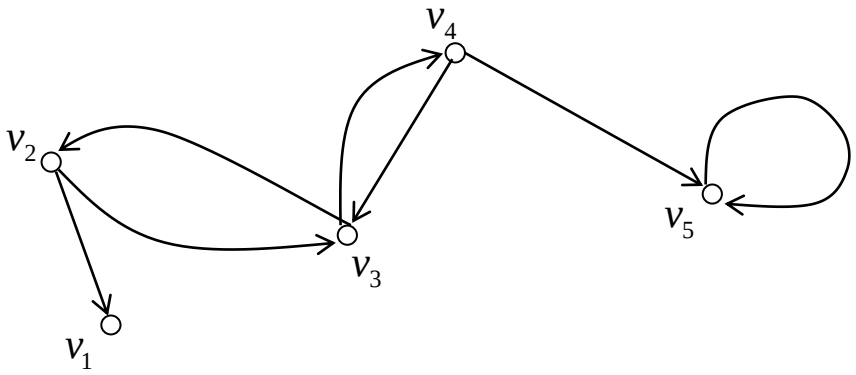


Рис. 3

Приклад 3. На рис. 3 зображено орієнтований граф із множиною вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ і множиною дуг $E = \{(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5)\}$.

Зазначимо, що дуга – це впорядкована пара вершин (записують у круглих дужках), тому в графі на рис. 3 дуги (v_2, v_3) та (v_3, v_2) – різні. На рисунках дуги позначають стрілками.

Означення. *Орієнтованим мультиграфом* називають пару (V, E), де V – скінченна непорожня множина вершин, а E – сім'я впорядкованих пар елементів з V.

Означення. Елементи (дуги) в E в разі орієнтованого мультиграфа можуть повторюватись, такі дуги називають *кратними.*

Підкреслимо, що кратні дуги з'єднують одну пару вершин і однаково напрямлені.

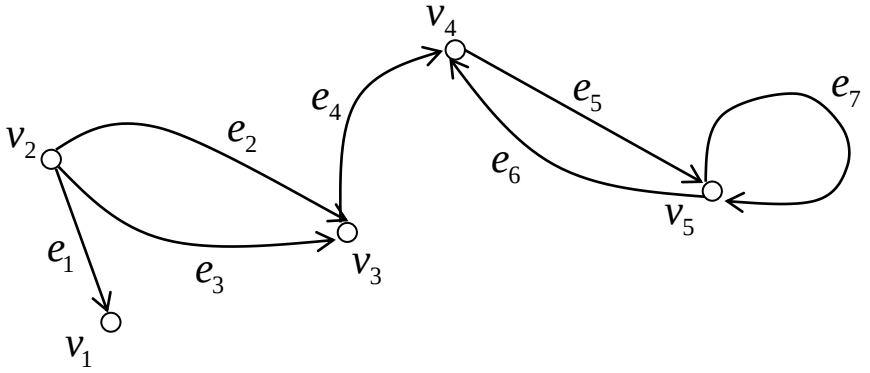


Рис. 4

Приклад 4. На рис. 4 наведено приклад орієнтованого мультиграфа. Дуги e_2 та e_3 – кратні, а дуги e_5, e_6 – ні.

Надалі ми будемо використовувати термін "граф" для опису довільних графів –

орієнтованих і неорієнтованих, із петлями та кратними ребрами чи без них. Термін "неорієнтований граф" або "псевдограф" – для довільного неорієнтованого графа, який може мати кратні ребра й петлі. Означення різних типів графів зведено в табл. 1.

Таблиця 1

Тип графа	Ребра	Кратні ребра дозволені?	Петлі дозволені?
Простий граф	Неорієнтовані	Ні	Ні
Мультиграф	Неорієнтовані	Так	Ні
Псевдограф	Неорієнтовані	Так	Так
Орієнтований граф	Орієнтовані (дуги)	Ні	Так
Орієнтований мультиграф	Орієнтовані (дуги)	Так	Так

Означення. Дві вершини u та v в неорієнтованому графі G називають *суміжними*, якщо існує ребро $\{u, v\}$, тобто $\{u, v\} \in E$. Якщо $e = \{u, v\}$ – ребро, то вершини u та v називають його *кінцями.*

Означення. Два ребра називають *суміжними*, якщо вони мають спільний кінець. Вершину v та ребро e називають *інцидентними*, якщо вершина v – кінець ребра e.

Зазначимо, що суміжність – це зв'язок між однорідними елементами графа, а інцидентність – зв'язок між його різнорідними елементами.

Означення. *Степінь вершини* в неорієнтованому графі – це кількість ребер, інцидентних цій вершині, причому петлю враховують двічі.

Означення. Степінь вершини v позначають $\deg(v)$. Якщо $\deg(v) = 0$, то вершину v називають *ізольованою*; якщо $\deg(v) = 1$ – *висячою* (*кінцевою*).

Приклад 5. У неорієнтованому графі на рис. 5 степені вершин такі: $\deg(v_1) = 4$, $\deg(v_2) = 4$, $\deg(v_3) = 6$, $\deg(v_4) = 1$, $\deg(v_5) = 3$, $\deg(v_6) = 0$. Отже, вершина v_6 – ізольована, а v_4 – висяча.

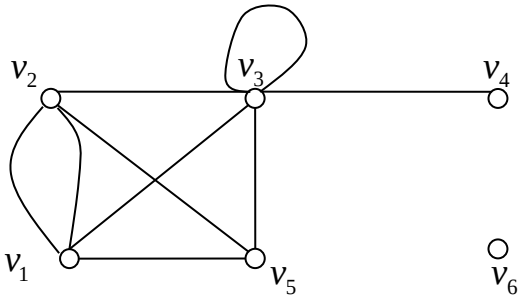


Рис. 5

Зв'язок між степенями вершин неорієнтованого графа та кількістю його ребер дає така теорема.

Теорема 1. Нехай $G = (V, E)$ – неорієнтований граф з m ребрами. Тоді

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

Зазначимо, що це твердження стосується будь-якого неорієнтованого графа, зокрема, з петлями й кратними ребрами.

Доведення. Кожне ребро додає по одиниці до степенів двох вершин, або двійку до степеня однієї вершини у випадку петлі. З цього випливає, що сума степенів вершин удвічі більша від кількості ребер.■

Зазначимо, що теорему 1 називають "теоремою про рукостискання", бо аналогічно як ребро має два кінці, так і під час рукостискання задіяні дві руки. З цієї теореми випливає, що *сума степенів усіх вершин неорієнтованого графа – парне число*. Цей простий факт має багато наслідків, один із яких сформульовано в наведеній нижче теоремі.

Теорема 2. Неорієнтований граф має парну кількість вершин непарного степеня.

Доведення. Позначимо як V_1 множину вершин непарного степеня, як V_2 – парного, а як m – кількість ребер графа. Тоді

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v).$$

Оскільки $\deg(v)$ – парне для $v \in V_2$, то другий доданок у правій частині рівності парний. Більше того, сума двох доданків справа – парна, бо дорівнює $2m$, і тому перший доданок $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ – також парний. Він являє собою суму, у якій всі доданки – непарні числа. Отже, кількість цих доданків має бути парною. Звідси випливає, що кількість вершин з непарним степенем – парна. ■

Тепер розглянемо орієнтований мультиграф $G = (V, E)$.

Означення. Якщо $(u, v) \in E$, то вершину u називають *початковою* (*ініціальною*), а вершину v – *кінцевою* (*термінальною*) вершиною дуги $e = (u, v)$.

Петля має початок і кінець в одній і тій самій вершині.

Означення. *Вершини* орієнтованого графа називають *суміжними*, якщо одна з них – початкова, а інша – кінцева для якоїсь дуги.

Означення. *Дуги* називають *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину.

Означення. Вершину *u* називають *інцидентною* дузі *e*, якщо *u* – початкова чи кінцева вершина цієї дуги.

Для орієнтованого графа означення степеня вершини інше.

Означення. В орієнтованому мультиграфі *напівстепенем входу* вершини *v* називають кількість дуг, для яких вершина *v* кінцева; позначають $\deg^-(v)$.

Означення. *Напівстепенем виходу* вершини *v* називають кількість дуг, для яких вершина *v* початкова; позначають $\deg^+(v)$.

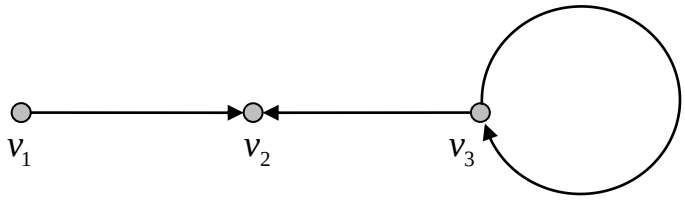


Рис. 6

Приклад 6. Для графа, зображеного на рис. 6 напівстепені вершин такі: $\deg^-(v_1)=0,\ \deg^+(v_1)=1,\ \deg^-(v_2)=2,\ \deg^+(v_2)=0\ \deg^-(v_3)=1,\ \deg^+(v_3)=2$.

Теорема 3. Нехай $G = (V, E)$ – орієнтований мультиграф, який має m дуг. Тоді

$$\sum_{v\in V}\deg^-(v)=\sum_{v\in V}\deg^+(v)=m.$$

Доведення. Оскільки кожна дуга має початкову й кінцеву вершини, то суми напівстепенів входу й виходу однакові. Кожна з цих сум, очевидно, дорівнює кількості дуг. ■

Означення. Неорієнтований граф *H* називають *підграфом* неорієнтованого графа $G = (V, E)$, якщо всі вершини графа *H* належать *V*, а всі його ребра належать *E*.

Якщо графи $H = (W, F)$ і $G = (V, E)$ – прості та *H* – підграф графа *G*, то розглядають іще два окремих випадки.

Означення. Підграф *H* називають *каркасним підграфом* (*фактором*), якщо $W = V$.

Означення. Якщо $W \neq V$, а *F* – множина всіх ребер із *E*, які мають кінці в *W*, то підграф *H* називають *породженим (індукованим) множиною W* і позначають як $G(W)$**.**

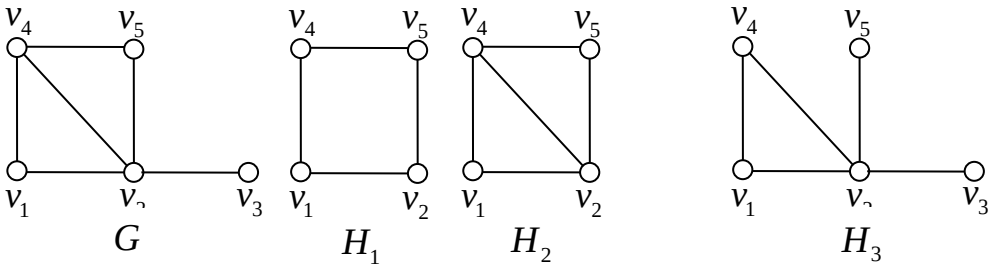


Рис. 7

Приклад 7. На рис. 7 зображено граф G та три його підграфа H_1, H_2, H_3, серед яких H_2 – породжений, а H_3 – каркасний.

Означення. *Об'єднанням двох простих графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називають простий граф $G = (V, E)$ такий, що $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

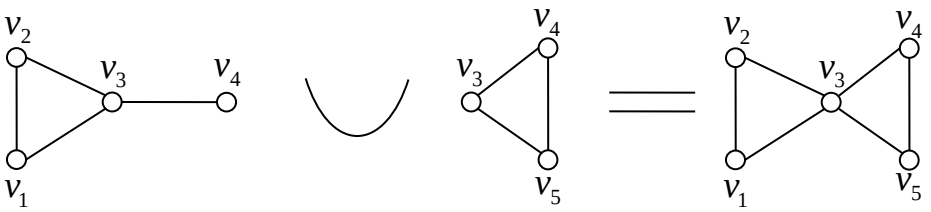


Рис. 8

Приклад 8. На рис. 8 наведено приклад об'єднання двох простих графів. Знаки "$\cup$" та "=" тут мають символічний зміст.

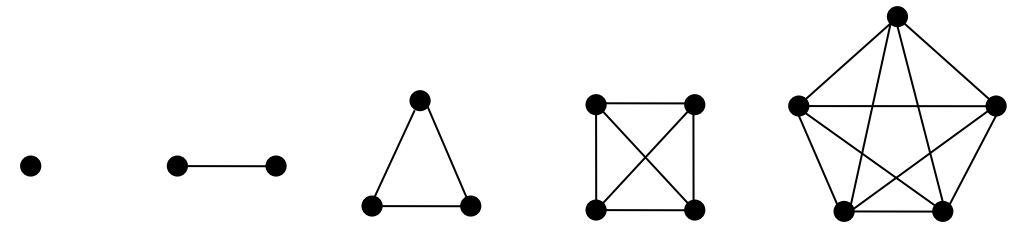
§ 2. Деякі спеціальні класи простих графів.

Розглянемо деякі спеціальні класи простих графів, які часто використовують як приклади й широко застосовувані.

Означення. *Повний граф з n вершинами* (позначають як K_n) – це граф, у якого будь-яку пару вершин з'єднано точно одним ребром.

Кількість ребер у графі K_n дорівнює $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Приклад 9. На рис. 9 зображено графи K_n для n = 1, 2, 3, 4, 5.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Рис. 9

Означення. Граф називають *порожнім*, якщо $E = \varnothing$, тобто такий граф не має ребер. Порожній граф з n вершинами позначають як O_n.

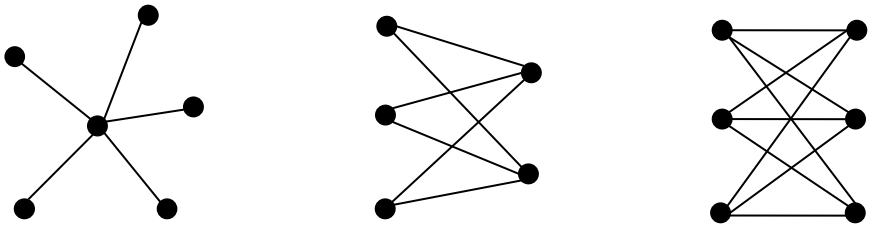
Означення. Граф $G = (V, E)$ називають *дводольним*, якщо множину його вершин V можна розбити на дві підмножини V_1 і V_2, що не перетинаються ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$), так, що кожне ребро з'єднує вершину з V_1 і вершину з V_2.

Іноді дводольний граф позначають як $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Означення. Дводольний граф називають *повним дводольним графом* (позначають як $K_{m,\,n}$, де $m = |V_1|$, $n = |V_2|$), якщо кожну вершину з V_1 з'єднано ребром із кожною вершиною з V_2.

Граф $K_{m,\,n}$ має $n + m$ вершин та $n \cdot m$ ребер.

Означення. Граф $K_{1,\,n}$ називають *зіркою.*



$K_{1,5}$ $K_{3,2}$ $K_{3,3}$

Рис. 10

Приклад 10. На рис. 10 наведено повні дводольні графи $K_{1,5}$, $K_{3,2}$ та $K_{3,3}$.

Означення. *Циклом* C_n, $n \geq 3$, називають граф із множиною вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ і множиною ребер $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

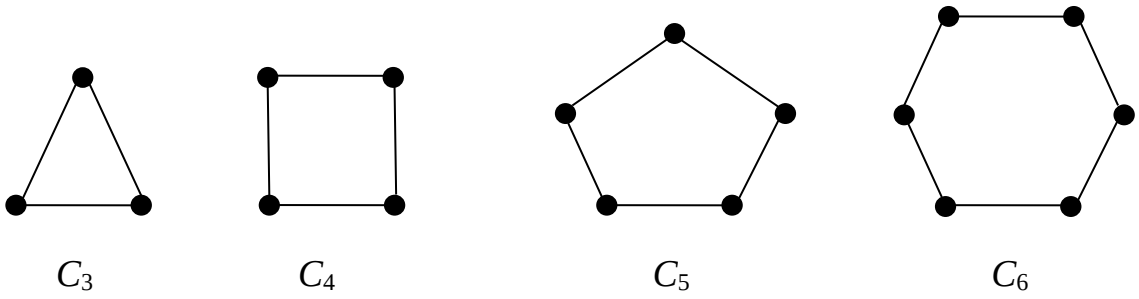


Рис. 11

Приклад 11. На рис. 11 зображено цикли C_3, C_4, C_5 і C_6.

Означення. *Колесом* W_n називається граф, який одержують із циклу C_n додаванням іще однієї вершини, яку з'єднують з усіма n вершинами в C_n новими ребрами.

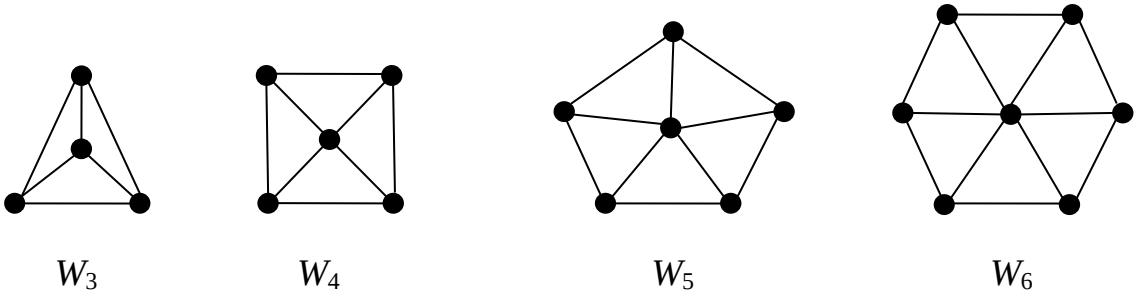


Рис. 12

Приклад 12. На рис. 12 зображено колеса W_3, W_4, W_5, W_6.

Означення. Граф, вершини якого відповідають усім 2^n бітовим рядкам довжиною n, називають n - *вимірним кубом* і позначають Q_n.

Дві вершини в Q_n з'єднано ребром тоді й лише тоді, коли відповідні бітові рядки відрізняються точно в одному біті.

Приклад 13. На рис. 13 зображено графи Q_1, Q_2 та Q_3.

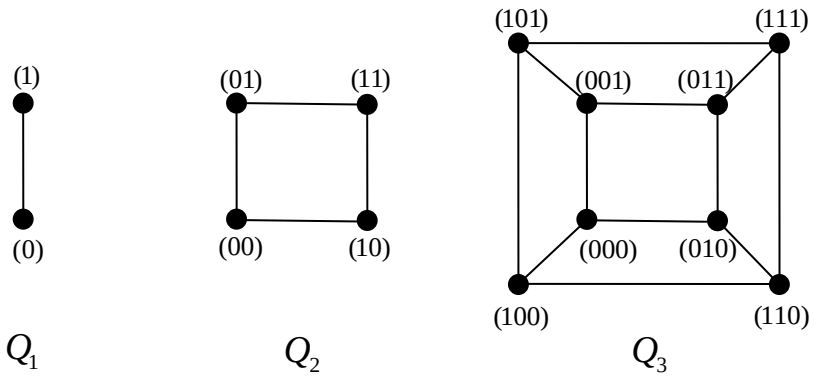


Рис. 13

Граф Q_{n+1} можна отримати з двох графів Q_n, з'єднавши ребрами їхні однаково

позначені вершини. Після цього до бітових рядків у вершинах одного з графів Q_n зліва дописують 0, другого – дописують 1.

§ 3. Способи подання графів.

Найзрозуміліший і корисний спосіб подання (зображення) графів – це рисунок на площині у вигляді точок і ліній, які з'єднують ці точки. Проте цей спосіб подання абсолютно непридатний, якщо потрібно розв'язувати на комп'ютері задачі з графами.

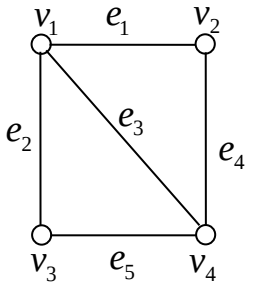


Рис. 14

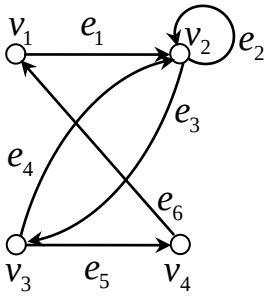


Рис. 15

Розглянемо декілька інших способів подання графів. Для спрощення розглядатимемо два найбільш важливих типи графів: простий граф (рис. 14) і орієнтований граф (рис. 15).

Означення. Матрицю, кожний елемент якої дорівнює 0 або 1, називають *булевою.*

3.1. Матриця інцидентності.

Нехай $G = (V,\ E)$ – простий граф із множиною вершин $V = \{v_1,\ v_2,\ldots,\ v_n\}$ і множиною ребер $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Означення. *Матрицею інцидентності графа G*, яка відповідає заданій нумерації вершин і ребер, називають булеву $n \times m$ матрицю M з елементами m_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ та ребро } e_j \text{ інцидентні}, \\ 0 & \text{в протилежному випадку}. \end{cases}$$

Приклад 14. Для графа, зображеного на рис. 14, матриця інцидентності має вигляд

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Отже, для простого графа в матриці інцидентності в кожному стовпці точно дві одиниці, і немає однакових стовпців.

Матрицю інцидентності можна використовувати й для подання мультиграфа. Тоді з'являться однакові стовпці (вони відповідають кратним ребрам).

Для подання псевдографа петлю e_j у вершині зображають значенням $m_{ij} = 2$ (у цьому разі матриця інцидентності, очевидно, не булева).

За допомогою матриці інцидентності можна подавати й орієнтовані графи. Для таких графів вона також не булева.

Нехай $G = (V, E)$ – орієнтований граф із множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ і множиною дуг $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Означення. *Матрицею інцидентності орієнтованого графа G*, яка відповідає заданій нумерації вершин і дуг, називають $n \times m$ матрицю M з елементами m_{ij} ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$), де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо дуга } e_j \text{ виходить з вершини } v_i, \\ -1, & \text{якщо дуга } e_j \text{ входить у вершину } v_i, \\ 2, & \text{якщо дуга } e_j - \text{це петля у вершині } v_i, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Приклад 15. Для графа, зображеного на рис. 15, матриця інцидентності має вигляд

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

З алгоритмічної точки зору матриця інцидентності не є добрим вибором для комп'ютерних застосувань. По-перше, вона вимагає $n \cdot m$ комірок пам'яті, більшість із яких зайнята нулями. По-друге, незручний доступ до інформації. Щоб отримати

відповідь на елементарні запитання (наприклад, чи існує дуга (v_i, v_j), до яких вершин ведуть дуги з v_i), у найгіршому випадку потрібно перебрати всі стовпці матриці, тобто виконати m кроків.

3.2. Матриця суміжності.

Нехай $G = (V, E)$ – простий граф, $|V| = n$. Припустимо, що вершини графа G занумеровані: $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Означення. *Матрицею суміжності графа G* (яка відповідає даній нумерації вершин) називають булеву $n \times n$ матрицю A з елементами a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад 16. Матриця суміжності для графа, зображеного на рис. 14, має вигляд

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Цілком очевидно, що для неорієнтованого графа $a_{ij} = a_{ji}$, тобто матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична. Більше того, позаяк у простому графі немає петель, то для нього в матриці суміжності $a_{ii} = 0$ $(i = \overline{1,n})$.

Матрицю суміжності можна використовувати також для подання псевдографа. Тоді це не булева матриця: елемент a_{ij} дорівнює кількості ребер, що з'єднують v_i та v_j. Петлю у вершині v_i дають значенням діагонального елемента $a_{ii} = 1$.

Для подання орієнтованих графів також використовують матрицю суміжності.

Означення. *Матрицею суміжності орієнтованого графа G* називають булеву $n \times n$ матрицю A з елементами a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад 17. Матриця суміжності для графа, зображеного на рис. 15, має вигляд

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Зазначимо, що матриця суміжності орієнтованого графа, загалом кажучи, несиметрична.

Матрицю суміжності можна використовувати й для подання орієнтованого мультиграфа. У такому разі це не булева матриця: елемент a_{ij} дорівнює кількості дуг, які мають v_i початковою вершиною, а v_j – кінцевою.

Великою перевагою матриці суміжності як способу подання графа є швидкий доступ до інформації: за один крок можна одержати відповідь на запитання, чи існує ребро (дуга) з v_i у v_j. Недоліком є те, що незалежно від кількості ребер обсяг пам'яті становить n^2 комірок.

Нарешті, розглянемо ще два способи подання графів у пам'яті комп'ютера.

Означення. Будь - яку скінченну послідовність елементів довільної природи будемо називати *списком*, а кількість елементів списку – його *довжиною*.

3.3. Подання графа списком пар (списком ребер).

Економнішим щодо пам'яті, особливо якщо m (кількість ребер) значно менша, ніж n^2 (n – кількість вершин), є метод подання графа списком пар, які відповідають його ребрам (або дугам).

Пара $[u, v]$ відповідає ребру $\{u, v\}$, якщо граф неорієнтований, і дузі (u, v), якщо граф орієнтований.

Для графів, зображених на рис. 14 та 15, списки пар подані відповідно на рис. 16 *а* та *б*.

v_1	v_2
v_1	v_3
v_1	v_4
v_2	v_4
v_3	v_4

Рис. 16 *а*)

v_1	v_2
v_2	v_2
v_2	v_3
v_3	v_2
v_3	v_4
v_4	v_1

Рис. 16 *б*)

Очевидно, що обсяг пам'яті в разі використання цього способу подання дорівнює $2m$ – це найекономніший щодо пам'яті спосіб. Недолік – велика (порядку m) кількість кроків для знаходження множини вершин, до яких ідуть ребра або дуги із заданої вершини. Ситуацію можна значно поліпшити, упорядкувавши множину пар лексикографічно та застосувавши двійковий пошук.

3.4. Подання графа списками суміжності.

Орієнтований граф G (без кратних дуг, але, можливо, з петлями) можна подати, указавши скінченну непорожню множину вершин V і відповідність Γ, котра вказує, як зв'язані між собою вершини. Відповідність Γ – багатозначне відображення множини V у V, а граф у такому разі позначають парою $G = (V, \Gamma)$. У літературі часто означають (орієнтований) граф саме в таких поняттях.

Приклад 18. Для орієнтованого графа, зображеного на рис. 15, відповідність Γ задано табл. 2.

Таблиця 2

v	$\Gamma(v)$ (термальні вершини)
v_1	v_2
v_2	v_2, v_3
v_3	v_2, v_4
v_4	v_1

Цей спосіб подання можна використовувати й для неорієнтованих простих графів, якщо кожне ребро умовно замінити двома протилежно напрямленими дугами.

Приклад 19. Для простого графа, зображеного на рис. 14, відповідність Γ задано табл. 3.

Таблиця 3

v	$\Gamma(v)$ (суміжні з v вершини)
v_1	v_2, v_3, v_4
v_2	v_1, v_4
v_3	v_1, v_4
v_4	v_1, v_2, v_3

Контрольні запитання

1. Дати визначення простого графа.
2. Що називають мультиграфом?
3. Що називають псевдографом?
4. Дати визначення орієнтованого графа.
5. Що називають орієнтованим мультиграфом?
6. Що називають степеню вершини в неорієнтованому графі?
7. Який існує зв'язок між степеню вершин неорієнтованого графа та кількістю його ребер?
8. Закінчити речення: "Сума степенів усіх вершин неорієнтованого графа …"
9. Закінчити речення: "Неорієнтований граф має парну кількість вершин…".
10. Що називають напівстепенем входу вершини, напівстепенем виходу вершини?
11. Який існує зв'язок між степеню вершин орієнтованого графа та кількістю його дуг?
12. Які граф називають підграфом?
13. Дати визначення каркасного підграфа та породженого деякою множиною.
14. Як визначають об'єднання двох простих графів?
15. Дати визначення повного графа з n вершинами.
16. Який граф називають дводольним, повним дводольним?
17. Дати визначення циклу, колеса.
18. Що називають n - вимірним кубом?
19. Дати визначення матриці інцидентності простого графа, орієнтованого графа.
20. Дати визначення матриці суміжності простого графа, орієнтованого графа.

21.Описати подання графа списком пар.

22.Описати подання графа списками суміжності.

Розробила
доцент кафедри прикладної математики і механіки
к. ф.-м. наук Чмир О.Ю.