

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ТЕМА 10. *ШЛЯХИ ТА ЦИКЛИ.*

План

ТЕМА 10. ШЛЯХИ ТА ЦИКЛИ.....	1
§ 1. Означення та результати. Термінологія.	2
§ 2. Характеристики зв'язності простого графа.	6
§ 3. Критерій дводольності графа.....	8
§ 4. Ізоморфізм графів.	9
§ 5. Ейлерів цикл у графі.	12
§ 6. Гамільтонів цикл у графі.....	15
§ 7.Зважені графи. Алгоритм Дейкстри пошуку найкоротшого шляху у графі.....	17
Контрольні запитання.....	19

Література

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. – Л.: “Магнолія – 2006”, 2016. – 432 с.

§ 1. Означення та результати. Термінологія.

Означення. *Шляхом* довжиною r із вершини u в вершину v в неорієнтованому графі називають послідовність ребер $e_1 = \{x_0, x_1\}$, $e_2 = \{x_1, x_2\}$, ..., $e_r = \{x_{r-1}, x_r\}$, де $x_0 = u$, $x_r = v$, r – натуральне число. Вершини u та v називають *крайніми*, а решту вершин шляху – *внутрішніми*.

Отже, шлях довжини r має r ребер, причому ребро враховують стільки разів, скільки воно входить у шлях.

Означення. *Циклом* у неорієнтованому графі називають шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u = v$.

У простому графі шлях можна задати послідовністю вершин, через які він проходить: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r$.

Означення. Шлях або цикл називають *простим*, якщо він не містить повторюваних ребер.

Означення. Говорять, що шлях із крайніми вершинами u та v з'єднує ці вершини. Шлях, що з'єднує вершини u та v , позначають як $\langle u, v \rangle$ та називають $\langle u, v \rangle$ - *шляхом*.

Приклад 1. На рис. 1 зображено простий граф. У ньому a, d, c, f, e – простий шлях довжиною 4, оскільки пари $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$ та $\{f, e\}$ – ребра. Однак, d, e, c, b – не шлях, бо пара $\{e, c\}$ – не ребро. Зазначимо, що b, c, f, e, b – цикл довжиною 4, позаяк $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$, та $\{e, b\}$ – ребра та цей шлях починається й закінчується в одній і тій самій вершині b . Шлях a, b, e, d, a, b , довжина якого дорівнює 5, не простий, оскільки він двічі проходить через ребро $\{a, b\}$.

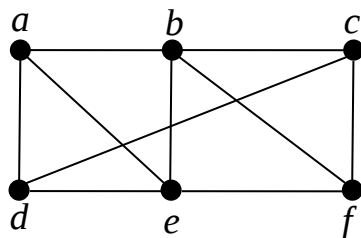


Рис. 1

Означення. Неорієнтований граф називають *зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини з'єднані шляхом.

Означення. Граф називають *незв'язним*, якщо він не є зв'язним.

Незв'язний граф складається із двох або більше зв'язних підграфів, кожна пара з

яких не має спільних вершин. Ці зв'язні підграфи називають *компонентами зв'язності* або просто *компонентами* графа.

Приклад 2. Граф G на рис. 2 зв'язний; граф H – незв'язний, оскільки не існує шляху $\langle u, v \rangle$. Граф H має дві компоненти.

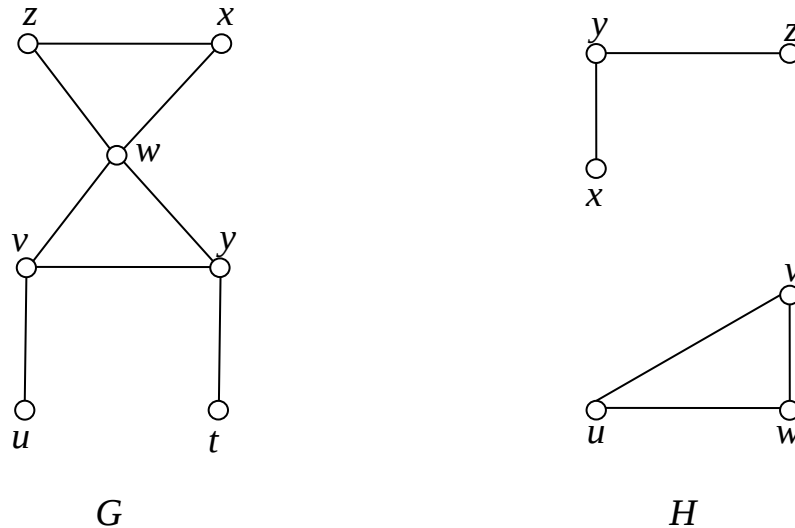


Рис. 2

Означення. Віддаллю $d(u, v)$ між вершинами u та v у неорієнтованому графі G називають довжину найкоротшого $\langle u, v \rangle$ -шляху, а сам цей шлях називають *геодезичним*.

Теорема 1. Між кожною парою різних вершин зв'язного неорієнтованого графа існує простий шлях.

Доведення. Нехай u та v – дві різні вершини зв'язного неорієнтованого графа $G = (V, E)$. Оскільки граф G – зв'язний, то існує принаймні один шлях між u та v . Нехай $x_0, x_1, \dots, x_r$, де $x_0 = u$, $x_r = v$ – послідовність вершин геодезичного шляху. Доведемо, що цей шлях – обов'язково простий. Припустимо протилежне, тоді $x_i = x_j$ для деяких i та j ($0 \leq i < j$). Тоді існує $\langle u, v \rangle$ -шлях $x_0, \dots, x_{i-1}, x_j, \dots, x_r$ з меншою довжиною ніж геодезичний. Але геодезичний шлях має найменшу довжину. Суперечність. Теорему доведено. ■

Для орієнтованого графа вводять поняття орієнтованого шляху (або просто шляху).

Означення. *Орієнтованим шляхом* (або просто *шляхом*) з вершини u у вершину v називають скінченну послідовність дуг $e_1 = (x_0, x_1)$, $e_2 = (x_1, x_2)$, $\dots$, $e_r = (x_{r-1}, x_r)$, де $x_0 = u$, $x_r = v$. Вершини u та v називають, як і в неорієнтованому графі, *крайніми*, а

решту вершин шляху – *внутрішніми*.

Означення. *Довжиною* шляху називають кількість дуг, з яких він складається.

Означення. *Орієнтованим циклом* називають орієнтований шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u = v$.

Означення. Орієнтований шлях або цикл називають *простим*, якщо жодна дуга не міститься в ньому більше одного разу.

Для орієнтованого графа поняття зв'язності вводять по-різному, залежно від того, чи враховують напрям дуг.

Означення. Орієнтований граф називають *сильно зв'язним*, якщо для будь-яких його різних вершин u та v існують орієнтовані шляхи від u до v та від v до u . Отже, для сильної зв'язності орієнтованого графа повинна існувати послідовність дуг з урахуванням орієнтації від будь-якої вершини графа до будь-якої іншої.

Орієнтований граф може не бути сильно зв'язним, але може бути, так би мовити, “в одному цілому”. У зв'язку із цим дамо таке означення.

Означення. Орієнтований граф називають *слабко зв'язним*, якщо існує шлях між будь-якими двома різними вершинами у відповідному йому неорієнтованому графі (тобто без урахування напрямку дуг).

Зрозуміло, що сильно зв'язний граф водночас і слабо зв'язний.

Приклад 3. На рис. 3 зображено графи G й H . Граф G – сильно зв'язний. Граф H – слабо зв'язний; він не сильно зв'язний, бо не існує орієнтованого шляху від w_1 до w_2 .

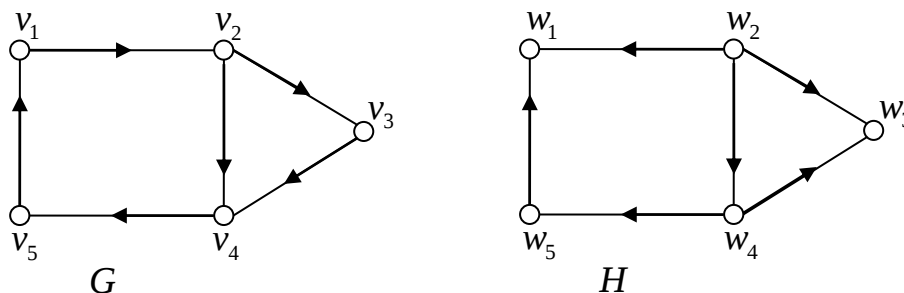


Рис. 3

Кількість різних шляхів між двома довільними вершинами графа можна підрахувати за допомогою матриці суміжності.

Теорема 2. Нехай G – граф (орієнтований чи неорієнтований; можуть бути кратні ребра й петлі), A – його матриця суміжності, яка відповідає заданій нумерації вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$. Тоді кількість різних шляхів довжиною r (r – натуральне) з вершини v_i у

вершину v_j дорівнює (i, j) -му елементу матриці A^r .

Доведення (методом математичної індукції за r). Для $r = 1$ твердження теореми очевидне: кількість шляхів від v_i до v_j довжиною 1 дорівнює (i, j) -му елементу матриці A , бо цей елемент дорівнює кількості ребер (дуг), які з'єднують v_i та v_j .

Припустимо, що (i, j) - й елемент матриці A^r дорівнює кількості різних шляхів довжиною r від вершини v_i до вершини v_j . Це індуктивна гіпотеза. Оскільки $A^{r+1} = A^r A$, то (i, j) - й елемент матриці A^{r+1} дорівнює $\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$, де b_{ik} – (i, k) - й елемент матриці A^r , a_{kj} – (k, j) - й елемент матриці суміжності A .

За індуктивною гіпотезою b_{ik} дорівнює кількості шляхів довжиною r із вершини v_i у вершину v_k . Шлях довжиною $r + 1$ із v_i у v_j складається зі шляху довжиною r із v_i до якоїсь проміжної вершини v_k та ребра (дуги) з v_k до v_j . За правилом добутку з комбінаторики кількість таких шляхів дорівнює добутку кількості b_{ik} шляхів довжиною r із v_i до v_k та кількості a_{kj} ребер (дуг) із v_k до v_j , тобто дорівнює $b_{ik} a_{kj}$. Якщо ці добутки підсумувати для всіх можливих проміжних вершин v_k , то потрібний результат випливає з комбінаторного правила суми. Теорему доведено. ■

Терміни, які тут уведено, не уніфіковано й вони по-різному означаються різними авторами. Ми дотримуємося термінології з книги [Kenneth H. Rosen. Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, Inc, 2012]. Уводяться поняття шляху, циклу, простих шляху й циклу в неорієнтованому графі. Аналогічно ці поняття вводяться й для орієнтованих графів. З нашого погляду перевагою цієї термінології є її простота: небагато нових термінів і вони стосуються всіх типів графів, як неорієнтованих, так і орієнтованих. Зазначимо (див. табл. 1), що в літературі також поширений альтернативний набір термінів [В.Ф. Емеличев и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990], [Ю.В. Капитанова та ін. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002]. Очевидно, особливо уважним потрібно бути з термінами “цикл”, “простий цикл” і “шлях”, оскільки їх використовують у різних значеннях. Зокрема, простий шлях і цикл ми визначаємо як такі, що не містять повторюваних ребер, тоді як у іншій системі термінів їх визначають як такі, що не містять повторюваних вершин. Це має значення для формулювання означень і теорем, у яких використовуються терміни й поняття шляху та циклу.

Таблиця 1

Властивості шляху	Терміни у лекціях стосуються довільних графів	Неорієнтовані графи [В.Ф. Емеличев, Ю.В. Капітонова]	Орієнтовані графи	
			[В.Ф. Емеличев]	[Ю.В. Капітонова]
Найзагальніший випадок: ребра (дуги) можуть повторюватись	Шлях	Маршрут	Орієнтований маршрут або маршрут	Маршрут або шлях
Усі ребра (дуги) різні	Простий шлях	Ланцюг	Ланцюг	Орланцюг
Усі вершини різні, окрім, можливо, крайніх	—	Простий ланцюг	Шлях	Простий орланцюг
Перша й остання вершини співпадають	Цикл	Циклічний маршрут	Циклічний маршрут	—
Перша й остання вершини співпадають, а ребра (дуги) не повторюються	Простий цикл	Цикл	—	Замкнутий орланцюг
Перша й остання вершини співпадають, а усі інші вершини різні	—	Простий цикл	Контур	Цикл

§ 2. Характеристики зв'язності простого графа.

Розглянемо неорієнтовані графи K_n та C_n . Обидва ці графи зв'язні, проте інтуїтивно зрозуміло, що для $n > 3$ граф K_n “сильніше зв'язаний”, ніж граф C_n . Розглянемо два поняття, які характеризують міру зв'язності простого графа.

Означення. Числом вершинної зв'язності (або просто числом зв'язності) $\kappa(G)$ простого графа G називають найменшу кількість вершин, вилучення яких дає незв'язний або одновіршинний граф.

Зазначимо, що вершину вилучають разом з інцидентними їй ребрами.

Приклад 4. $\kappa(K_1) = 0$, $\kappa(K_n) = n - 1$, $\kappa(C_n) = 2$.

Приклад 5. Граф G , зображений на рис. 4, зв'язний, але його зв'язність можна порушити вилученням вершини u . Отже, $\kappa(G) = 1$.

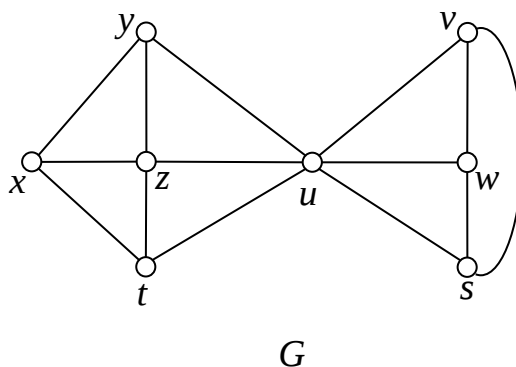


Рис. 4

Якщо ж спробувати порушити зв'язність цього графа вилученням ребер (а не вершин), то потрібно вилучити не менше ніж три ребра.

Нехай G – простий граф з $n > 1$ вершинами.

Означення. Числом реберної зв'язності $\lambda(G)$ графа G називають найменшу кількість ребер, вилучення яких дає незв'язний граф.

Число реберної зв'язності одновершинного графа вважають таким, що дорівнює 0.

Приклад 6. Для графа G , зображеного на рис. 4, $\lambda(G) = 3$.

Означення. Вершину u простого графа G називають *точкою з'єднання*, якщо граф G в разі її вилучення матиме більше компонент, ніж даний граф G .

Зокрема, якщо G – зв'язний граф і u – точка з'єднання, то G без вершини u – незв'язний.

Нагадаємо, що вершину u при цьому вилучають разом із інцидентними їй ребрами.

Означення. Ребро графа G називають *мостом*, якщо його вилучення збільшує кількість компонент.

Отже, точки з'єднання й мости – це свого роду “вузькі місця” простого графа.

Приклад 7. Граф H із рис. 5 має три точки з'єднання t, s, p та один міст $\{t, s\}$.

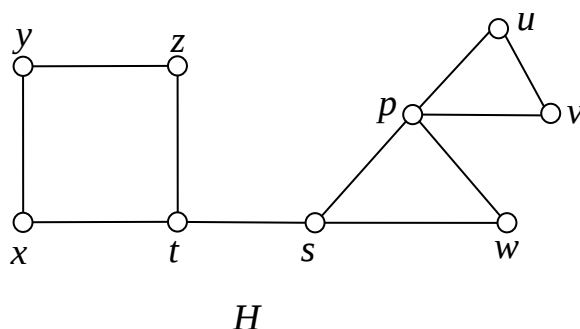


Рис. 5

Позначимо як $\delta(G)$ мінімальний степінь вершин графа G . Можна показати, що

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Означення. Простий граф G називають t -зв'язним, якщо $\kappa(G) \geq t$ і реберно- t -зв'язним, якщо $\lambda(G) \geq t$.

Отже, відмінний від K_1 граф однозв'язний тоді й лише тоді, коли він зв'язний.

Означення. Двозв'язні графи – це зв'язні графи без точок з'єднання, відмінні від графа K_1 .

Приклад 8. Граф G , зображений на рис. 4, однозв'язний і реберно-3-зв'язний.

Очевидно, що кількість ребер у зв'язному простому графі з n вершинами не перевищує кількості ребер у графі K_n , тобто $\frac{n(n-1)}{2}$. Але скільки може бути ребер у простому графі з n вершинами й фіксованою кількістю k компонент?

Теорема 3. Якщо простий граф G має n вершин і k компонент, то кількість m його ребер задовольняє нерівності

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

§ 3. Критерій дводольності графа.

Д. Кеніг сформулював критерій дводольності простого графа в термінах довжин простих циклів.

Теорема 4 (Кеніг, 1936 р.). Для того, щоб граф G був дводольним, необхідно й достатньо, щоб він не містив простих циклів із непарною довжиною.

Теорема Кеніга підказує простий спосіб розпізнавання дводольності графа. Цей спосіб ґрунтується на простому алгоритмі, який називають *пошуком ушир*.

Означення. Множину вершин, суміжних із вершиною v , будемо називати *оточенням* вершини v .

Пошук ушир так приписує вершинам графа номери 0, 1, 2, ...: починають із довільної вершини, приписують їй номер 0. Кожній вершині з оточення вершини 0 приписують номер 1. Тепер розглядають по чергово оточення всіх вершин із номером 1, і всім вершинам, що належать цим оточенням і ще не мають номера, приписують номер 2. Розглядають оточення всіх вершин із номером 2 та продовжують процес

присвоювання номерів, доки це можливо. Якщо даний граф $G = (V, E)$ зв'язний, то пошук ушир занумерує всі його вершини.

Далі розіб'ємо множину вершин V на дві підмножини – A та B . До множини A долучимо всі вершини з парними номерами (та 0), а до множини B – з непарними. Розглянемо породжені підграфи $G(A)$ та $G(B)$. Якщо обидва вони порожні (достатньо перевірити, що всі пари вершин з однаковими номерами не суміжні), то G – дводольний граф, а ні – то не дводольний.

Зазначимо, що існує й інший, більш розповсюджений варіант пошуку вшир. Він відрізняється тим, що всі вершини отримують різні номери.

§ 4. Ізоморфізм графів.

Як у застосуваннях теорії графів, так і в самій цій теорії істотним є те, що існують об'єкти (вершини графа) і зв'язки між об'єктами (ребра графа). Із цих позицій графи, котрі одержують один з одного зміною позначень вершин, доцільно не розрізняти. Оформимо ці міркування у вигляді такого означення.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ – прості графи, а $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ – бієкція.

Означення. Якщо для будь-яких вершин u та v графа G_1 їх образи $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 тоді й лише тоді, коли u та v суміжні в G_1 , то цю бієкцію називають *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2 .

Означення. Якщо такий ізоморфізм існує, то графи G_1 та G_2 називають *ізоморфними* та записують $G_1 \cong G_2$.

Означення. Інакше кажучи, прості графи G_1 та G_2 називають *ізоморфними*, якщо існує така бієкція $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, що вершини u та v суміжні в G_1 тоді й лише тоді, коли вершини $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 для всіх $u, v \in V_1$ (у такому разі говорять, що ця бієкція зберігає суміжність вершин).

Приклад 9. Графи на рис. 6 ізоморфні, бієкцію φ можна задати так: $\varphi(x_1) = y_1$; $\varphi(x_2) = y_4$; $\varphi(x_3) = y_3$; $\varphi(x_4) = y_2$.

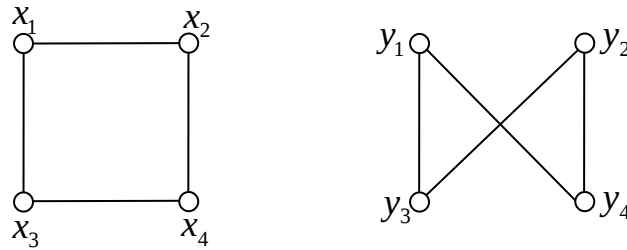


Рис. 6

Ізоморфні графи природно ототожнювати (їх можна зобразити одним рисунком). Вони могли б різнитися природою своїх елементів, але саме це ігнорується при введенні поняття “граф”. У деяких ситуаціях усе ж доводиться розрізняти ізоморфні графи, і тоді корисне поняття “позначеного графа”.

Означення. Граф з n вершинами називають *позначеним*, якщо його вершинам присвоєно якісь мітки, наприклад, числа $1, 2, \dots, n$.

Ототожнимо кожну з вершин з її номером (і, отже, множину вершин – із множиною чисел $\{1, 2, \dots, n\}$) і означимо рівність простих позначених графів G_1 та G_2 з однаковою кількістю вершин n так: $G_1 = G_2$ тоді й лише тоді, коли $E_1 = E_2$.

Приклад 10. На рис. 7 зображено три різні позначені графи.

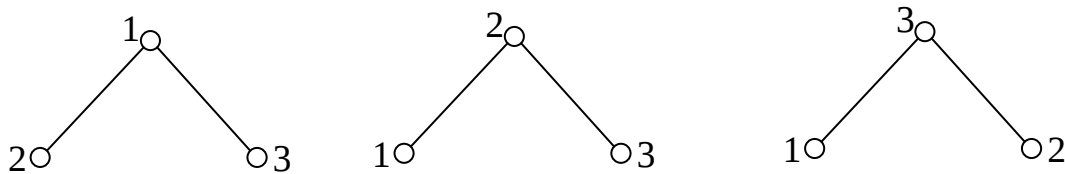


Рис. 7

Щоб наголосити, що графи розрізняють лише з точністю до ізоморфізму, говорять про *абстрактний граф*. Абстрактний граф приводить до різних матриць суміжності залежно від нумерації вершин. З’ясуємо, як пов’язані між собою ці матриці.

Нехай G_1 та G_2 – позначені графи з n вершинами й $G_1 \cong G_2$ (тобто G_1 та G_2 ізоморфні). Це означає, що G_1 та G_2 розрізняються лише нумерацією вершин, тобто існує підстановка s на множині вершин, яка зберігає суміжність: вершини u та v тоді й лише тоді суміжні в G_1 , коли їхні образи $s(u)$ та $s(v)$ суміжні в G_2 .

Нехай $A = [a_{ij}]$ та $B = [b_{ij}]$ – матриці суміжності відповідно графів G_1 та G_2 . Тоді $b_{s(i)s(j)} = a_{ij}$ ($i, j = \overline{1, n}$). Тим самим доведено таку теорему.

Теорема 5. Прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх матриці суміжності

можна отримати одну з одної однаковими перестановками рядків і стовпців.

Задача виявлення ізоморфізму дуже складна. Теоретично алгоритм перевірки пари простих графів на ізоморфізм існує – його сформульовано в попередній теоремі. Проте він не знаходить практичного застосування, оскільки може бути потрібно до $n!$ перестановок і перевірок.

Часто неважко довести, що два графи не ізоморфні. Це буде, якщо порушуються інваріанти.

Означення. *Інваріант* – це властивість, яку довільні ізоморфні графи або обидва мають, або обидва не мають.

Такими інваріантами, наприклад, є:

- кількість вершин;
- кількість ребер;
- кількість вершин конкретного степеня (вершині v , $v \in V_1$, $\deg(v) = d$, має

відповідати вершина $u = \varphi(v)$, $u \in V_2$, $\deg(u) = d$).

Є й інші інваріанти, але порушення інваріанта – це лише достатня умова неізоморфності графів. Не існує набору інваріантів для виявлення ізоморфізму.

Приклад 11. Графи на рис. 8 не ізоморфні. Обидва графи мають по п'ять вершин і по шість ребер. Проте граф G_2 має вершину степеня 1, якої не має граф G_1 .

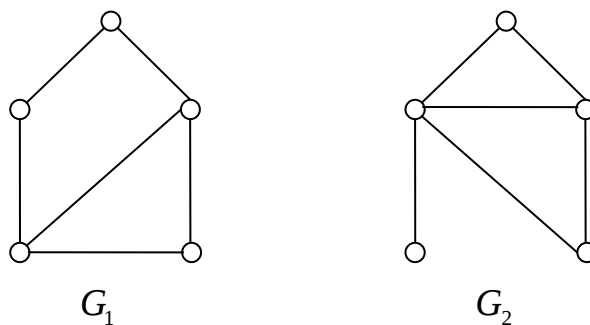


Рис. 8

Приклад 12. На рис. 9 зображено графи G_1 і G_2 . Обидва вони мають по 8 вершин і по 10 ребер. Вони також мають по чотири вершини степеня 2 і по чотири вершини степеня 3. Однак ці графи не ізоморфні. Справді, позаяк $\deg(x_1) = 2$ в G_1 , то вершині x_1 має відповідати одна із чотирьох вершин y_2, y_4, y_6, y_8 у графі G_2 . Зазначені вершини мають у графі G_2 степінь 2. Проте кожна з цих чотирьох вершин суміжна з іншою вершиною степеня 2 в графі G_2 , що не виконується для вершини x_1 у графі G_1 .

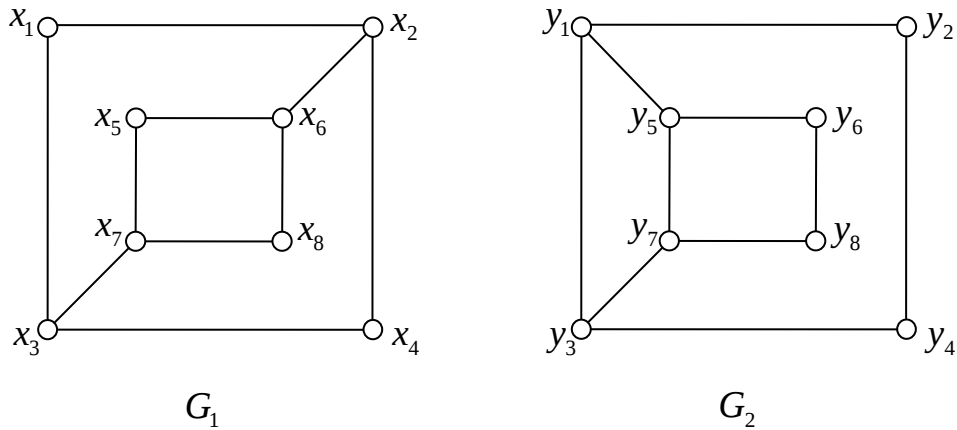


Рис. 9

Те, що графи, зображені на рис. 9, не ізоморфні, можна довести й інакше. На рис. 10 зображено підграфи графів G_1 і G_2 , породжені вершинами степеня 3. Якщо графи G_1 та G_2 ізоморфні, то й зазначені підграфи мають бути ізоморфними. Проте підграфи з рис. 10 не ізоморфні.

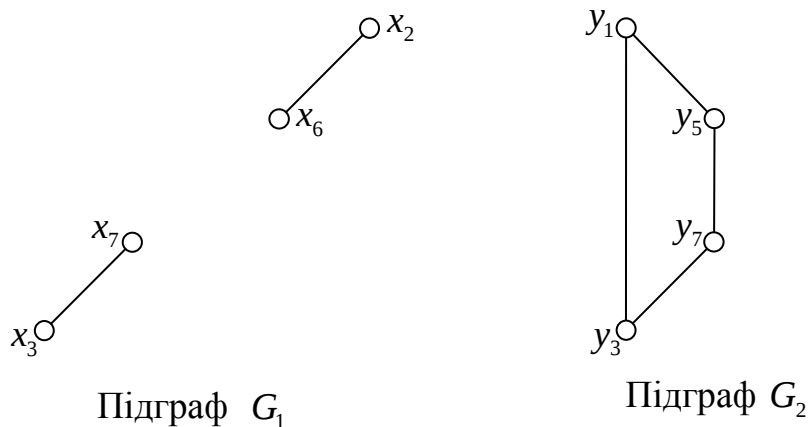


Рис. 10

Ми розглянули поняття ізоморфізму для простого графа. Для неорієнтованих мультиграфів і псевдографів, а також орієнтованих графів природно вводять поняття ізоморфізму як бієкції між множинами вершин, яка зберігає суміжність, кратності ребер, петлі та напрямки дуг. Зазначимо, що теорема 5 залишається правильною для мультиграфів, псевдографів і орієнтованих графів.

§ 5. Ейлерів цикл у графі.

Початок теорії графів як розділу математики пов'язують із задачею про кенігсберзькі мости. Сім мостів міста Кенігсберга (нині – Калінінград у Росії) було розміщено на річці Прегель так, як зображено на рис. 11. Чи можна, починаючи з якоїсь точки міста, пройти через усі мости точно по одному разу й повернутись у

початкову точку? Швейцарський математик Л. Ейлер розв'язав цю задачу. Його розв'язання, опубліковане 1736 р., було першим явним застосуванням теорії графів. Ейлер поставив у відповідність плану міста мультиграф G , вершини якого відповідають чотирьом частинам A, B, C, D міста, а ребра – мостам. Цей мультиграф зображено на рис. 12.

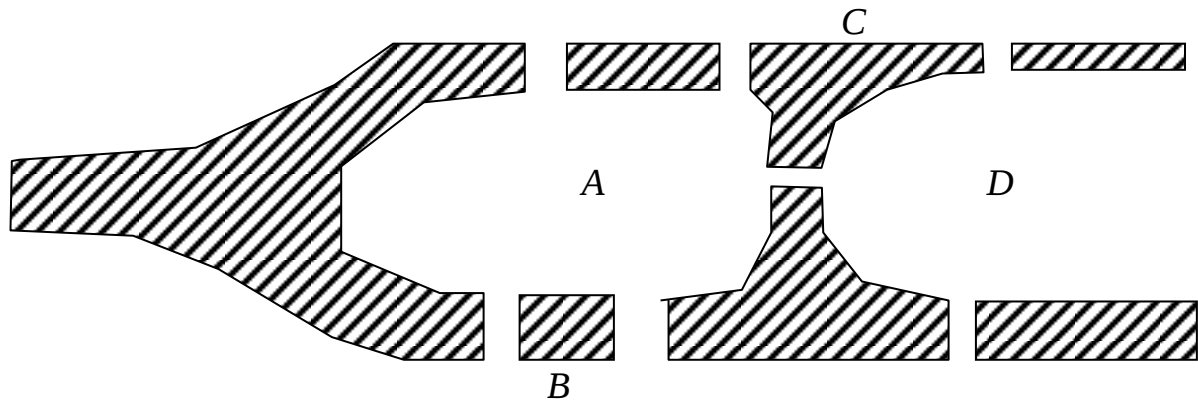


Рис. 11

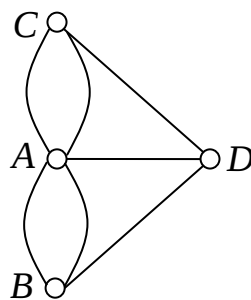


Рис. 12

Отже, задачу про кенігсберзькі мости мовою теорії графів можна сформулювати так: чи існує в мультиграфі G простий цикл, який містить усі ребра цього мультиграфа? Ейлер довів нерозв'язність задачі про кенігсберзькі мости.

Нагадаємо, що в простому циклі ребра не повторюються, а вершини можуть повторюватись.

Означення. *Ейлеровим циклом* у зв'язному мультиграфі G називають простий цикл, який містить усі ребра графа.

Означення. *Ейлеровим шляхом* у зв'язному мультиграфі G називають простий шлях, який містить усі ребра графа.

Приклад 13. На рис. 13 проілюстровано концепцію ейлерових циклів і шляхів. Граф G_1 має ейлерів цикл, наприклад, a, e, c, d, e, b, a ; граф G_3 не має ейлерового циклу, але має ейлерів шлях: a, c, d, e, b, d, a, b ; граф G_2 не має ні ейлерового циклу, ні ейлерового шляху.

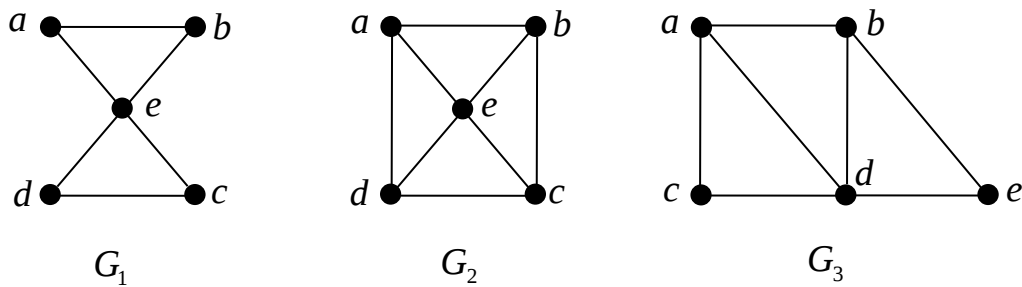


Рис. 13

Існує простий критерій (необхідна й достатня умова) для виявлення, чи має граф ейлерів цикл.

Теорема 6. Зв'язний мультиграф має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Повертаючись до задачі про кенігсберзькі мости, виявляємо, що мультиграф на рис. 12 має всі вершини непарного степеня. Отже, цей мультиграф не має ейлерового циклу, тому неможливо пройти кожний міст по одному разу й повернутись в початкову точку шляху.

Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу.

Робота полягає в нумерації ребер у процесі побудови ейлерового циклу.

Крок 1 (початок). Починаємо з довільної вершини u та присвоюємо довільному ребру $\{u, v\}$ номер 1. Викреслюємо ребро $\{u, v\}$ і переходимо у вершину v .

Крок 2 (ітерація). Нехай w – вершина, у яку ми перейшли на попередній ітерації, k - останній присвоєний номер. Вибираємо довільне ребро, інцидентне вершині w , причому міст вибираємо лише тоді, коли немає інших можливостей. Присвоюємо вибраному ребру номер $(k + 1)$ і викреслюємо його.

Крок 3 (закінчення). Цей процес закінчуємо, коли всі ребра графа викреслено та пронумеровано – ці номери задають послідовність ребер в ейлеровому циклі.

Теорема 7. Зв'язний мультиграф має ейлерів шлях, але не має ейлерового циклу тоді й лише тоді, коли він має точно дві вершини непарного степеня.

Зазначимо, що *будь-який ейлерів шлях починається в одній із цих двох вершин непарного степеня, а закінчується в іншій.*

Оскільки мультиграф для кенігсберзьких мостів має чотири вершини з непарними степенями, можна дійти висновку про неможливість пройти кожний міст по одному разу, навіть якщо не потрібно повертатись у початкову точку.

Означення. Граф, який має ейлерів цикл, часто називають *ейлеровим графом*.

Означення. *Ейлеровим циклом* у слабо зв'язному орієнтованому мультиграфі називають орієнтований простий цикл, який містить усі дуги графа.

Теорема 8. Орієнтований слабо зв'язний мультиграф має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли напівстепінь входу кожної вершини дорівнює її напівстепеню виходу.

Теорема 9. Орієнтований граф має ейлерів шлях, але не має ейлерового циклу тоді і лише тоді, коли він слабо зв'язний і вхідні та вихідні напівстепені всіх вершин мають однакові значення за виключенням двох з них, а саме: в однієї вхідний напівстепінь на одиницю більший від вихідного, а в другій – вихідний напівстепінь на одиницю більший за вхідний.

§ 6. Гамільтонів цикл у графі.

Означення. Шлях $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ у неорієнтованому зв'язному графі $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ називають *гамільтоновим шляхом*, якщо $x_i \in V$ і $x_i \neq x_j$ для $0 \leq i < j \leq n-1$.

Означення. Цикл $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0$ (тут $n \geq 3$) у графі G називають *гамільтоновим циклом*, якщо $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ – гамільтонів шлях.

Інакше кажучи, гамільтонів цикл і гамільтонів шлях проходять через кожну вершину графа точно один раз (у циклі окрім першої й останньої вершин). Зазначимо, що гамільтонові цикл і шлях, узагалі кажучи, не містять усіх ребер графа. За означенням гамільтонові цикли розглядають лише для графів, які мають не менше трьох вершин (отже, довжина гамільтонового циклу не менша трьох).

Термін “гамільтонів” у цих означеннях походить від імені відомого ірландського математика У. Гамільтона (W. Hamilton), який 1857 р. запропонував гру “Навколосвітня подорож”. Кожній із двадцяти вершин додекаедра (правильного дванадцятигранника, грані якого – п'ятикутники) приписано назву одного з великих міст світу. Потрібно, розпочавши з довільного міста, відвідати решту 19 міст точно один раз, і повернутись у початкове місто. Перехід дозволено ребрами додекаедра.

Приклад 14. Ту саму задачу можна зобразити й на площині (рис. 14). Вона зводиться до відшукування в графі гамільтонового циклу. Один із можливих розв'язків показано потовщеними лініями.

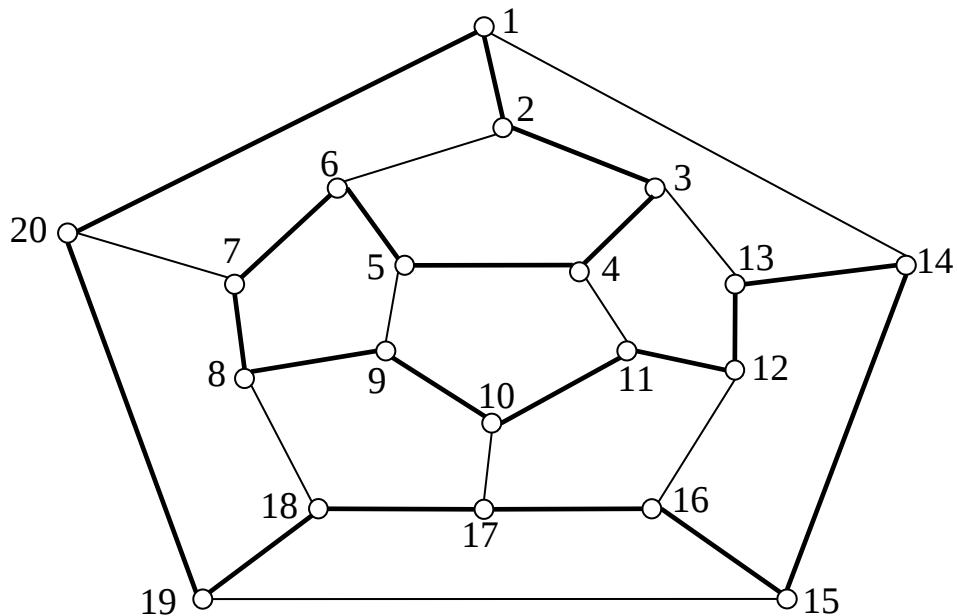


Рис. 14

Не всі зв'язні графи мають гамільтонів цикл хоча б тому, що такі графи мають бути двозв'язними (тобто граф, який має точки з'єднання, не може мати гамільтонового циклу). Приклад графа, зображеного на рис. 15, свідчить, що наявності гамільтонового циклу двозв'язності недостатньо.

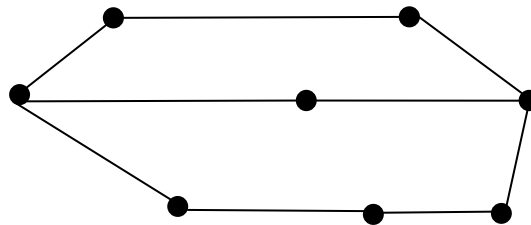


Рис. 15

Незважаючи на зовнішню подібність формулювань задач про існування ейлерового й гамільтонового циклів, ці задачі принципово різні. Використовуючи результати попереднього параграфу, легко виявити, чи має граф ейлерів цикл, і, якщо має, то побудувати його. Ситуація для гамільтонового циклу істотно інша. Відповісти на питання, чи має граф гамільтонів цикл, зазвичай, дуже важко. Вивчення достатніх умов наявності в графі гамільтонового циклу – один із важливих напрямів у теорії графів. Інтуїтивно зрозуміло, що граф із багатьма ребрами, достатньо рівномірно розподіленими, з великими шансами має гамільтонів цикл. Одну з теорем такого типу ми розглянемо.

Теорема 10 (Г. Дірак, 1952 р.). Якщо G – зв'язний простий граф з $n \geq 3$

вершинами, і для кожної вершини v виконується нерівність $\deg v \geq \frac{n}{2}$, то граф G має гамільтонів цикл.

Як знайти гамільтонів цикл або переконатись, що його немає? Очевидний алгоритм, який можна застосувати, – це “повний перебір усіх можливостей”, тобто $n!$ перестановок усіх вершин графа й перевірок. Зрозуміло, що такий спосіб практичного застосування не знаходить. Розгляд практично застосовного алгоритму бектрекінг відкладемо до наступного розділу.

Означення. Граф, який містить гамільтонів цикл, часто називають *гамільтоновим графом*.

§ 7. Зважені графи. Алгоритм Дейкстри пошуку найкоротшого шляху у графі.

На практиці часто потрібно розглядати графи, де потрібно брати до уваги додаткову інформацію – віддаль між окремими пунктами, вартість проїзду, час проїзду тощо. Для цього використовують поняття зваженого графа.

Означення. *Зваженим* називають простий граф, кожному ребру e якого приписано дійсне число $w(e)$. Це число називають *вагою* ребра e .

Означення. *Зваженим орієнтованим графом* називають орієнтований граф, кожній дузі e якого приписано дійсне число $w(e)$. Це число називають *вагою* дуги e .

Означення. *Довжиною шляху в зваженому графі* називають суму ваг ребер (дуг), які утворюють цей шлях.

Якщо граф не зважений, то вагу кожного ребра (кожної дуги) вважають рівною 1 й отримують раніше введені поняття довжини шляху як кількості ребер (дуг) у ньому.

Задача про найкоротший шлях полягає в знаходженні найкоротшого шляху від заданої початкової вершини a до заданої вершини z .

Найефективнішим алгоритмом визначення довжини найкоротшого шляху від фіксованої вершини до будь-якої іншої є алгоритм, запропонований 1959 р. датським математиком Е. Дейкстрою. Цей алгоритм застосовний лише у випадку, коли вага кожного ребра (дуги) додатна. Опишемо докладно цей алгоритм для орієнтованого графа.

Нехай $G = (V, E)$ – зважений орієнтований граф, $w(v_i, v_j)$ – вага дуги (v_i, v_j) .

Почавши з вершини a , знаходимо віддаль від a до кожної із суміжних із нею вершин. Вибираємо вершину, віддаль від якої до вершини a найменша: нехай це буде вершина v^* .

Далі знаходимо віддалі від вершини a до кожної суміжної з v^* вершини вздовж шляху, який проходить через вершину v^* . Якщо для якоїсь із таких вершин ця віддаль менша від поточної, то заміняємо нею поточну віддаль.

Знову вибираємо вершину, найближчу до a , але таку, що не вибиралась раніше; повторюємо процес.

Описаний процес зручно виконувати за допомогою присвоювання вершинам міток. Є мітки двох типів – тимчасові та постійні. Вершини з постійними мітками групують у множину M , яку називають *множиною позначених вершин*. Решта вершин має тимчасові мітки, і множину таких вершин позначимо як T , $T = V \setminus M$.

Позначатимемо мітку (тимчасову чи постійну) вершини v як $l(v)$. Значення постійної мітки $l(v)$ дорівнює довжині найкоротшого шляху від вершини a до вершини v , тимчасової – довжині найкоротшого шляху, який проходить лише через вершини з постійними мітками.

Фіксованою початковою вершиною вважаємо вершину a ; довжину найкоротшого шляху шукаємо до вершини z (або до всіх вершин графа).

Тепер опишемо алгоритму Дейкстри формально.

Опис алгоритму Дейкстри.

Присвоювання початкових значень

Крок 1. Виконати $l(a) := 0$ і вважати цю мітку постійною. Виконати $l(v) := \infty$ для всіх $v \neq a$ і вважати ці мітки тимчасовими. Виконати $x := a$, $M := \{a\}$.

Оновлення міток

Крок 2. Для кожної вершини v , яка суміжна з вершиною a та не належить до множини M , тобто $v \in \Gamma(x) \setminus M$, замінити мітки: $l(v) := \min\{l(v); l(x) + w(x, v)\}$, тобто оновлювати тимчасові мітки вершин, у які з вершини x іде дуга.

Перетворення мітки в постійну

Крок 3. Серед усіх вершин із тимчасовими мітками знайти вершину з мінімальною міткою, тобто знайти вершину v^* з умови $l(v^*) = \min\{l(v)\}$, $v \in T$, де $T = V \setminus M$.

Крок 4. Уважати мітку вершини v^* постійною й виконати $M := M \cup \{v^*\}$, $x := v^*$

(вершину v^* включено в множину M).

Закінчення

Крок 5. а) Для пошуку шляху від a до z : якщо $x = z$, то $l(z)$ – довжина найкоротшого шляху від a до z , зупинитись; якщо $x \neq z$, то перейти до кроку 2.

б) Для пошуку шляхів від a до всіх інших вершин: якщо всі вершини отримали постійні мітки (включені в множину M), то ці мітки дорівнюють довжинам найкоротших шляхів, зупинитись; якщо деякі вершини мають тимчасові мітки, то перейти до кроку 2.

Алгоритм Дейкстри дає змогу обчислити довжину найкоротшого шляху від початкової вершини a до заданої вершини z . Для знаходження самого шляху потрібно лише поступово будувати вектор вершин, з яких найкоротший шлях безпосередньо потрапляє в дану вершину – методом зворотнього ходу.

Контрольні запитання

1. Що називають шляхом, циклом? Дати визначення простого шляху (циклу).
2. Який граф називають зв'язним, незв'язним? Дати визначення компоненти графа.
3. Що називають віддаллю між двома вершинами у неорієнтованому графі?
4. Що називають орієнтованим шляхом, циклом? Дати визначення довжини шляху.
5. Який орієнтований граф називають сильно зв'язним, слабо зв'язним?
6. Як знаходити кількість різних шляхів між двома довільними вершинами графа?
7. Що називають числом вершинної зв'язності?
8. Що називають числом реберної зв'язності?
9. Дати визначення точки з'єднання, мосту.
10. Сформулювати критерій дводольності графа.
11. Що називають ізоморфізмом двох графів? Який існує зв'язок між ізоморфізмом та матрицями суміжності двох графів?
12. Дати визначення ейлерового циклу, шляху.
13. Сформулювати існування ейлерового циклу, шляху у зв'язному мультиграфі.
14. Сформулювати існування ейлерового циклу, шляху у зв'язному орієнтованому мультиграфі.
15. Описати алгоритм Флері побудови ейлерового циклу.
16. Що називають гамільтоновим шляхом, циклом?

17. За яких умов зв'язний простий граф має гамільтонів цикл?
18. Що називають зваженим графом та довжиною шляху в зваженому графі?
19. Описати алгоритм Дейкстри.

Розробила
доцент кафедри прикладної математики і механіки
к. ф.-м. наук

Чмир О.Ю.