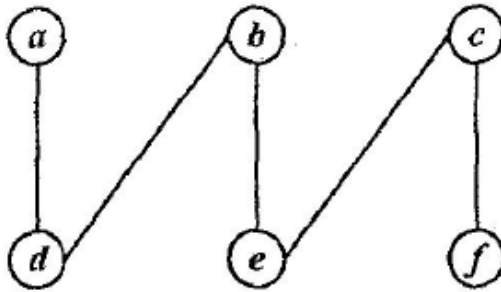


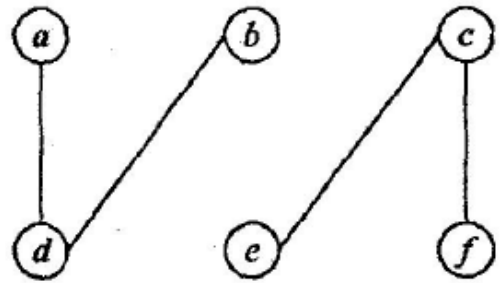
## 4.1 Дерева. Означення, властивості

4.1.1 Які з графів а) - f) є деревами ?

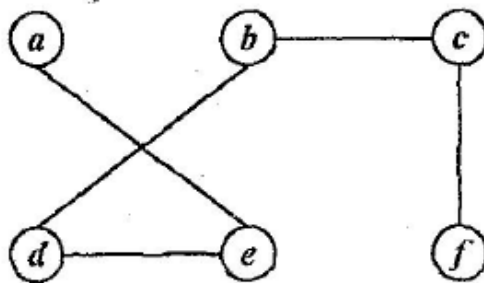
a)



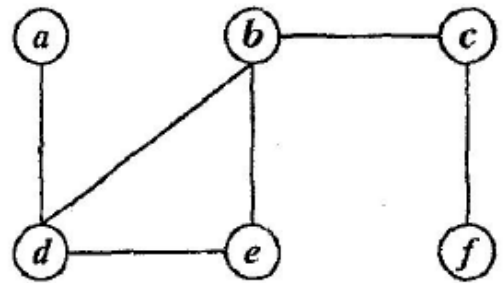
b)



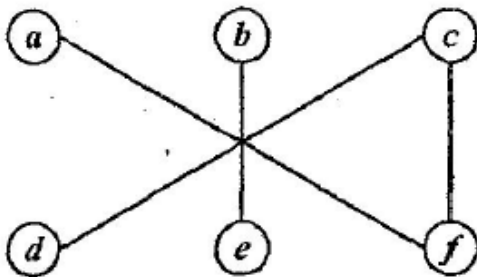
c)



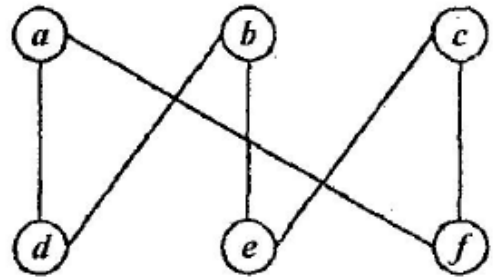
d)



e)



f)



4.1.2 Дати відповідь на питання, що стосуються дерева, зображеного на рисунку:

- яка вершина є коренем;
- які вершини є внутрішніми;
- які вершини є листками;
- вказати синів вершини  $j$ ;
- вказати батька вершини  $n$ ;
- вказати предків вершини  $n$ ;
- вказати нащадків вершини  $b$ .

- 4.1.3 Який рівень кожної вершини та висота дерева задачі 4.1.2. ?
- 4.1.4 При яких  $m > 0$  та  $n > 0$  повний дводольний граф  $K_{m,n}$  є деревом?
- 4.1.5 Скільки ребер має дерево з 1000 вершинами ?

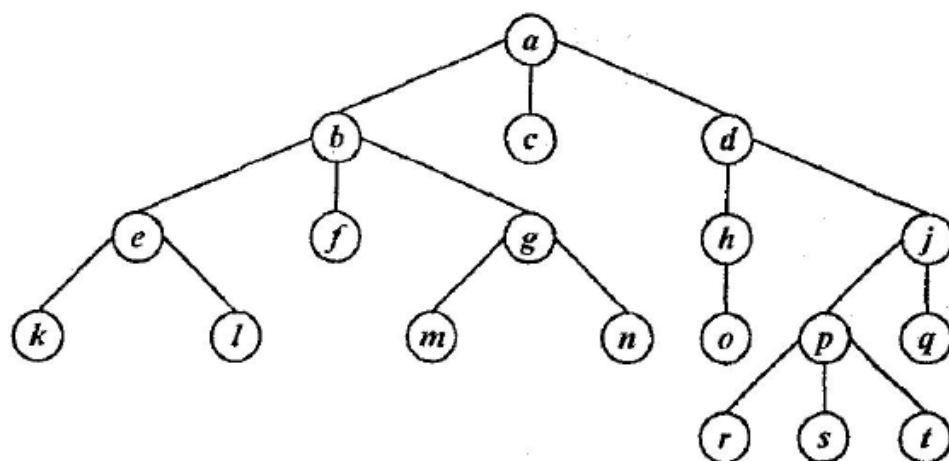


Рис. до задачі 4.1.2.

- 4.1.6 Довести, що повне  $p$ -арне дерево з  $i$  внутрішніми вершинами містить  $n = pi + 1$  вершин.
- 4.1.7 Скільки вершин має повне 5-арне дерево з 100 внутрішніми вершинами ?
- 4.1.8 Скільки ребер має повне бінарне дерево з 1000 внутрішніми вершинами ?
- 4.1.9 Скільки листків має повне 3-арне дерево з 100 вершинами?
- 4.1.10 Припустимо, що у шаховому турнірі беруть участь 1000 гравців. Скільки ігор потрібно зіграти для визначення переможця, якщо турнір проводиться за олімпійською системою (програвший вибуває) ?
- 4.1.11 Нехай  $p$ -арне дерево має висоту  $h$ . Довести, що воно має щонайбільше  $p^h$  листків.
- Вказівка.* Використати індукцію по  $h$ .
- 4.1.12 Чи існує повне  $p$ -арне дерево  $T$ , яке має 84 листки та висоту 3 ?
- 4.1.13 Завершене  $p$ -арне дерево - це повне  $p$ -арне дерево, в якому все листя має однаковий рівень. Побудувати завершене бінарне дерево з висотою 4 та завершене 3-арне дерево з висотою 3.

4.1.14 Скільки вершин та листків має завершене  $p$ -арне дерево з висотою  $h$  ?

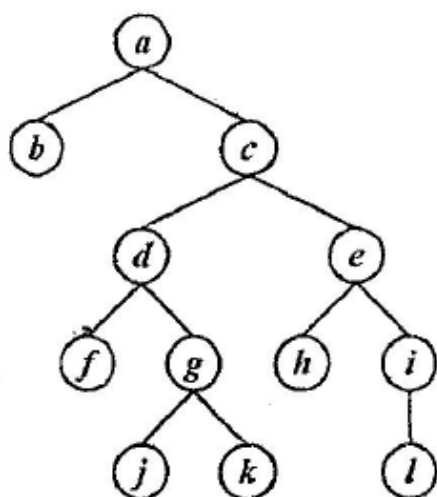
4.1.15 Скільки ребер має ліс з  $t$  дерев, у якого  $n$  вершин ?

4.1.16 Кореневе дерево Фібоначчі  $T_n$  визначається рекурсивно таким чином.  $T_1$  та  $T_2$  є кореневими деревами, що містять одну вершину. Для  $n = 3, 4, \dots$  кореневе дерево  $T_n$  будується з кореня, причому  $T_{n-1}$  є лівим піддеревом, а  $T_{n-2}$  - правим. Зобразити перші 7 корневих дерев Фібоначчі.

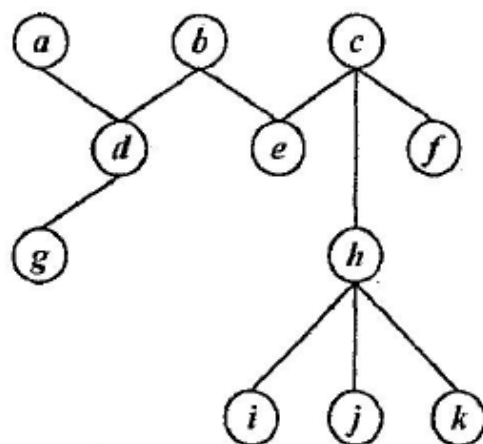
4.1.17 Скільки вершин, листків та внутрішніх вершин має кореневе дерево Фібоначчі  $T_n$ ? Яка висота  $T_n$  ?

4.1.18 Ексцентриситет вершини у некореновому дереві - це довжина найдовшого простого шляху, який починається у цій вершині. Вершина називається центром, якщо вона має найменший ексцентриситет. Знайти центр дерев а), б).

а)



б)



4.1.19 Показати, що центр може бути знайдений у некореновому дереві як корінь кореневого дерева з мінімальною висотою.

4.1.20 Показати, що дерево має один або два центри, які суміжні між собою. Навести приклад дерева, яке має два центри.