КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ТЕМА 12. *ВІДНОШЕННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.*

План

Література

1. *Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М.* Дискретна математика. – Л.: “Магнолія – 2006”, 2016. – 432 с.

Відношення – одне з основних понять сучасної математики. Мову відношень використовують для опису зв'язків між об'єктами та поняттями. Зокрема, поняття бінарного відношення дає змогу формалізувати операції попарного порівняння, і тому його широко використовують у теорії вибору, а реляційні бази даних ґрунтуються на концепції n-арних відношень.

§ 1. Основні означення.

Найпростіший спосіб задати зв'язок між елементами двох множин – записати впорядковані пари елементів, що перебувають у цьому зв'язку.

Нехай A та B – множини.

Означення. *Бінарне відношення з A в B* – це підмножина R декартового добутку $A \times B$ цих множин: $R \subset A \times B$.

Інакше кажучи, бінарне відношення з A в B – це якась множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині A, а другий – множині B. Якщо $(a,b) \in R$, то пишуть aRb.

Бінарні відношення описують зв'язки між елементами двох множин. Зв'язки між елементами більше ніж двох множин задають n-арними відношеннями.

Розглядаючи в певному контексті лише бінарні відношення, уживають термін "*відношення*" замість "бінарне відношення".

Приклад 1. Нехай $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ та задано відношення $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$. Отже, $0Ra$, оскільки $(0,a) \in R$, а $(1,b) \notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови $A = B$.

Означення. *Відношенням на множині A* називають бінарне відношення з A в A. Інакше кажучи, відношенням R на множині A – це підмножина декартового квадрату множини A, тобто $R \subset A^2$.

Приклад 2. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R = \{(a, b) \mid a$ ділить $b\}$?

Очевидно, що $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Як подати відношення?

Бінарне відношення на множині A можна подати за допомогою булевої матриці або орієнтованого графа.

Означення. *Матриця, яка задає відношення R на n-елементній множині A,* – це

$n \times n$ матриця $M_R = [m_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$, де $$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, & \text{якщо } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

Граф G_R, який задає відношення R на множині A, будують так.

Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j) існує тоді й лише тоді, коли пара $(a_i, a_j) \in R$. Такий граф G_R називають *графом, асоційованим із відношенням* R, або просто *графом відношення* R.

Приклад 3. На рис. 1 зображено матрицю та граф, які задають відношення з прикладу 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

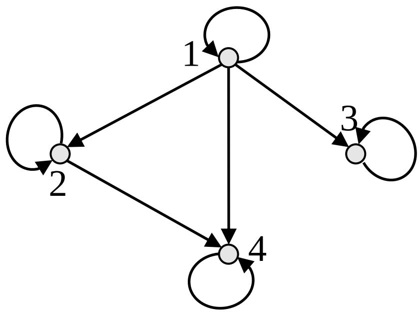

Рис. 1

Розглянемо властивості відношень на множині A.

Означення. Відношення R на множині A називають *рефлексивним,* якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$;

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$;

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

$R_6 = \{(3, 4)\}$.

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні, бо вони містять усі пари вигляду (a, a), тобто пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4). Решта відношень не рефлексивні. Зокрема, R_1, R_2, R_4, R_6 не містять пари (3, 3).

Означення. Відношення R на множині A називають *іррефлексивним,* якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$.

Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1, R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Означення. Відношення R на множині A називають *симетричним,* якщо для будь-яких $a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$, випливає, що $(b,a) \in R$.

У прикладі 4 лише відношення R_2 та R_3 симетричні.

Означення. Відношення R на множині A називають *антисиметричним,* якщо для всіх $a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, випливає, що $a = b$. Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a).

У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4, R_5 та R_6. У кожному з них немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a,b) \in R$ та $(b,a) \in R$.

Важливо зазначити, що існують відношення, які мають обидві властивості як симетричності, так і антисиметричності. Наприклад, відношення $R = \varnothing$ на множині $A = \{a\}$ водночас і симетричне, і антисиметричне. Іще один приклад: відношення $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ є симетричним і антисиметричним одночасно.

Є також відношення, які не мають жодної з цих двох властивостей, наприклад, відношення R_1 з прикладу 4.

Означення. Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх $a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$, випливає, що $(b,a) \notin R$.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне.

Відношення R_5 із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Означення. Відношення R на множині A називають *транзитивним,* якщо для будь-яких $a,b,c \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, випливає $(a,c) \in R$.

Відношення R_4, R_5, R_6 із прикладу 4 транзитивні. Справді, якщо пари (a, b) та (b, c) належать цим відношенням, то й пара (a, c) теж належить.

Відношення R_1, R_2, R_3 із прикладу 4 не транзитивні: $(3,4) \in R_1$, $(4,1) \in R_1$, але $(3,1) \notin R_1$; $(2,1) \in R_2$, $(1,2) \in R_2$, але $(2,2) \notin R_2$; $(2,1) \in R_3$, $(1,4) \in R_3$, але $(2,4) \notin R_3$.

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються на матрицях і графах цих відношень.

Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі.

Матриця M_R симетричного відношення симетрична.

Матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij} = 1$, випливає $m_{ji} = 0$ (але може бути $m_{ij} = m_{ji} = 0$) (рис. 2).

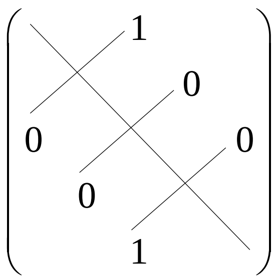

Рис. 2

Граф G_R рефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині.

У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) (рис. 3).

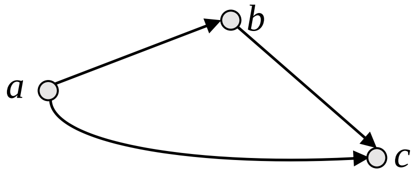

Рис. 3

§ 2. Відношення еквівалентності.

Розглянемо відношення, які водночас мають декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації.

Означення. Відношення на множині A називають *відношенням еквівалентності,* якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Означення. Два елементи множини A, пов'язані відношенням еквівалентності, називають *еквівалентними.*

Оскільки відношення еквівалентності за означенням рефлексивне, то в будь-якому відношенні еквівалентності кожний елемент множини A еквівалентний до самого себе. Більше того, позаяк відношення еквівалентності за означенням транзитивне, то з того, що a та b еквівалентні й b та c еквівалентні, випливає, що a та c також еквівалентні.

Приклад 5. Нехай R – таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a = b) \vee (a = -b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому, являє собою відношенням еквівалентності.

Приклад 6. Нехай R – таке відношення на множині дійсних чисел: aRb тоді й лише тоді, коли $(a – b)$ – ціле число. Оскільки $a – a = 0$ ціле для всіх дійсних чисел a, то aRa для всіх дійсних чисел a. Отже, відношення R рефлексивне. Нехай тепер aRb. Звідси випливає, $a – b$ – ціле число. Але тоді $b – a$ також ціле, звідси bRa, тобто відношення R симетричне. Якщо aRb і bRc, то числа $a – b$ та $b – c$ цілі. Але тоді число $a – c = (a – b) + (b – c)$ також ціле, звідси aRc, тобто відношення R транзитивне. Отже, R – відношення еквівалентності на множині дійсних чисел.

Приклад 7. Конгруентність за модулем m. Нехай $m > 1$ – ціле число. Доведемо, що $R = \{(a, b) \mid a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)\}$ – відношення еквівалентності на множині Z цілих чисел. За означенням $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ означає, що m ділить $(a – b)$. Зазначимо, що $a – a=0$ ділиться на m, бо $0 = 0 \cdot m$. Отже, $a \equiv a(\mathrm{mod}\ m)$, відношення рефлексивне. Далі, $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, якщо $a - b = k \cdot m$, де k – ціле число. Отже, $b - a = (-k) \cdot m$, тобто $b \equiv a(\mathrm{mod}\ m)$, і відношення симетричне. Нарешті, нехай $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, $b \equiv c(\mathrm{mod}\ m)$. Це означає, що $a - b = k \cdot m$, $b - c = l \cdot m$, де k, l – цілі числа. Додамо останні дві рівності: $a - b + b - c = (k + l)m$, тобто $a – c = (k + l)$m. Звідси випливає, що $a \equiv c(\mathrm{mod}\ m)$, відношення транзитивне. Отже, конгруентність за модулем m – відношення еквівалентності на множині цілих чисел.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A.

Означення. Множину всіх елементів, які еквівалентні до елемента $a \in A$, називають *класом еквівалентності* (елемента a) *за відношенням* R, його позначають як $[a]_R$.

Маючи на увазі якесь певне відношення еквівалентності, використовують позначення $[a]$. Отже: $[a]_R = \{ x \in A \mid xRa \}$.

Означення. Елемент $b \in [a]_R$ називають *представником* цього класу еквівалентності.

Приклад 8. Знайдемо класи еквівалентності відношення з прикладу 5. Оскільки ціле число еквівалентне до самого до себе та до протилежного числа, то класи еквівалентності за цим відношенням такі: $[a] = \{ -a, a\}$, $a \neq 0$ та $[0]=\{0\}$.

Приклад 9. Знайдемо класи еквівалентності елементів 0 і 1 для відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 7). Клас еквівалентності елемента 0 містить усі цілі числа b такі, що $0 \equiv b(\mathrm{mod}\ 4)$, тобто такі, що діляться на 4. Отже, [0]={..., – 8, – 4, 0, 4, 8, ...}. Клас еквівалентності елемента 1 містить усі цілі числа b такі, що $1 \equiv b(\mathrm{mod}\ 4)$. Звідси випливає, що [1]={..., – 7, – 3, 1, 5, 9, ...}. Класи еквівалентності, подібні до розглянутих у цьому прикладі, називають *класами конгруентності за модулем m* і позначають як $[a]_m$.

Отже, $[0]_4$={..., – 8, – 4, 0, 4, 8, ...}, $[1]_4$={..., – 7, – 3, 1, 5, 9, ...}.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Важливо зазначити, що класи еквівалентності, породжені двома елементами множини A, або збігаються, або не перетинаються. Про це твердить наступна лема.

Лема 1. Нехай R – відношення еквівалентності на множині A. Тоді такі твердження еквівалентні:

(I) aRb,

(II) $[a] = [b]$,

(III) $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.

Доведення. Спочатку доведемо, що з (I) випливає (II). Припустимо, що aRb. Щоб довести рівність $[a] = [b]$, покажемо, що $[a]\subset[b]$ та $[b]\subset[a]$. Нехай $c\in[a]$, тоді aRc. Оскільки aRb, а R – симетричне відношення, то bRa. Позаяк відношення R транзитивне, то з bRa й aRc випливає bRc, тому $c\in[b]$. Отже, $[a]\subset[b]$. Аналогічно можна довести, що $[b]\subset[a]$.

Доведемо тепер, що з (II) випливає (III). Справді $[a]\neq\varnothing$, бо $a\in[a]$ внаслідок рефлексивності. Отже, з $[a] = [b]$ випливає $[a]\cap[b]\neq\varnothing$.

Нарешті, доведемо, що з (III) випливає (I). Припустимо, що $[a]\cap[b]\neq\varnothing$. Тоді існує такий елемент c, що $c\in[a]$ та $c\in[b]$, тобто aRc та bRc. Із симетричності відношення R випливає cRb. Оскільки відношення R транзитивне, то з aRc та cRb випливає aRb.

Позаяк з (I) випливає (II), з (II) випливає (III) та з (III) випливає (I), то твердження (I), (II), (III) еквівалентні.

<u>Відношення еквівалентності R, задане на множині A, тісно пов’язане з розбиттям цієї множини</u>. Цей зв’язок виражено у двох наступних теоремах. Нагадаємо, що систему S підмножин множини A називають розбиттям цієї множини, якщо всі множини системи S непорожні, попарно не перетинаються, і об’єднання їх усіх

дорівнює множині *A*.

Теорема 1. Кожне відношення еквівалентності *R* на множині *A* породжує розбиття множини *A* на класи еквівалентності.

Доведення. Об'єднання класів еквівалентності за відношенням *R* покриває множину *A*, бо кожний елемент *a* з множини *A* міститься у своєму класі еквівалентності $[a]_R$. Інакше кажучи, $\bigcup_{a\in A}[a]_R = A$. Із леми 1 випливає, що коли $[a]_R \neq [b]_R$, то $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$. Терему доведено.

Приклад 10. Відношення конгруентності за mod 4 (див. приклад 9) породжує розбиття множини *Z* цілих чисел на 4 класи еквівалентності: $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ та $[3]_4$. Вони попарно не перетинаються, а їх об'єднання дорівнює множині *Z*.

Теорема 2. Будь-яке розбиття множини *A* визначає на множині *A* відношення еквівалентності.

Доведення. Нехай $a,b \in A$, будемо вважати, що *aRb* тоді й лише тоді, коли *a* та *b* належать одній множині розбиття. Залишилося довести, що одержане відношення на множині *A* являє собою відношенням еквівалентності. Для цього потрібно переконатись, що воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Справді, оскільки *a* належить якійсь множині розбиття, то *aRa*, тобто відношення рефлексивне. Нехай A_i – якась множина розбиття та $a,b \in A_i$. Тоді й $b,a \in A_i$, тобто з *aRb* випливає *bRa*. Симетричність доведено. Нарешті, із *aRb* і *bRc* випливає $a,b,c \in A_i$. Звідси *aRc*, тобто відношення *R* транзитивне. Теорему доведено.

§ 3. Відношення часткового порядку.

Означення. Відношення *R* на множині *A* називають *відношенням часткового порядку* (або *частковим порядком*), якщо воно рефлексивне, антисиметричне й транзитивне.

Означення. Множину *A* з частковим порядком *R* називають *частково впорядкованою множиною* й позначають (*A*, *R*).

Приклад 11. Нехай *A* = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}. Відношення R_1 задамо як звичайне порівняння чисел: $(a,b) \in R_1$ тоді й лише тоді, коли $a \le b$ $(a,b \in A)$. Неважко безпосередньо переконатись, що це частковий порядок на множині *A* .

Приклад 12. Нехай A – множина з прикладу 11. Відношення R_1 задамо так: $(a,b)\in R_1$ тоді й лише тоді, коли a ділить b. Отже: R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 12), (3, 6), (3, 12), (4, 8), (4, 12), (6, 12)}. Легко переконатись, що це відношення рефлексивне, антисиметричне й транзитивне, тому являє собою відношення часткового порядку на множині A.

Означення. Два елементи a та b частково впорядкованої множини (A, R) називають *порівнюваними,* якщо aRb або bRa.

Означення. Якщо a та b – такі елементи, що ні aRb, ні bRa, то їх називають *непорівнюваними.*

Приклад 13. Елементи 3 та 4 множини (A, R_1) із прикладу 12 – непорівнювані.

Означення. Якщо (A, R) – частково впорядкована множина, у якій будь-які два елементи порівнювані, то її називають *лінійно,* або *тотально впорядкованою,* а частковий порядок R – *лінійним,* або *тотальним* порядком.

Отже, множина (A, R) із прикладу 11 лінійно впорядкована, множина (A, R_1) із прикладу 12 частково впорядкована, але не лінійно впорядкована.

Означення. Лінійно впорядковану множину називають також *ланцюгом.*

Приклад 14. Нехай $A=E_2^n$ – множина всіх векторів довжиною n з булевими компонентами (тобто з компонентами 0, 1). Задамо частковий порядок на цій множині так: $(a_1,a_2,...,a_n)\le(b_1,b_2,...,b_n)$ тоді й лише тоді, коли $a_i\le b_i$ $(i=\overline{1,n})$. Цей частковий порядок не лінійний. Наприклад, не можна порівняти вектори (010000) і (101000).

Нехай на скінченній множині A задано якесь відношення часткового порядку R, а G_R – граф, асоційований із цим відношенням. Відношення R можна задати за допомогою такої процедури. Починають із графа G_R. Оскільки відношення часткового порядку рефлексивне, то в кожній вершині графа G_R є петля. Вилучають усі петлі в графі G_R. Потім вилучають усі дуги графа G_R, які є в ньому внаслідок транзитивності. Наприклад, якщо пари (a, b) та (b, c) належать відношенню, то в графі вилучають дугу (a, c). Більше того, якщо пара (c, d) також належить відношенню R, то в графі G_R вилучають дугу (a, d). Після цього всі вершини графа розміщують на площині так, щоб початкова вершина кожної дуги була нижче, ніж кінцева вершина. Тепер усувають усі стрілки, бо дуги спрямовано вгору, до своїх кінцевих вершин (отже, напрямок зрозумілий).

Усі ці кроки коректно визначені й у випадку скінченної множини A потрібна тільки скінченна кількість таких кроків. У результаті отримують *діаграму Гассе* (Hasse), яка містить усю інформацію, потрібну для подання відношення часткового порядку.

Приклад 15. Побудуємо діаграму Гассе для відношення часткового порядку з прикладу 12. Почнемо з орієнтованого графа, асоційованого з відношенням R_1 (рис. 4, *а*). Вилучимо всі петлі (рис. 4, *б*), а потім – усі дуги, зумовлені властивістю транзитивності, це дуги (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 8), (2, 12), (3, 12). Переконаємося, що напрямок всіх дуг – знизу вверх, і усунемо стрілки. Отримаємо діаграму Гассе. (рис. 4 *в*).

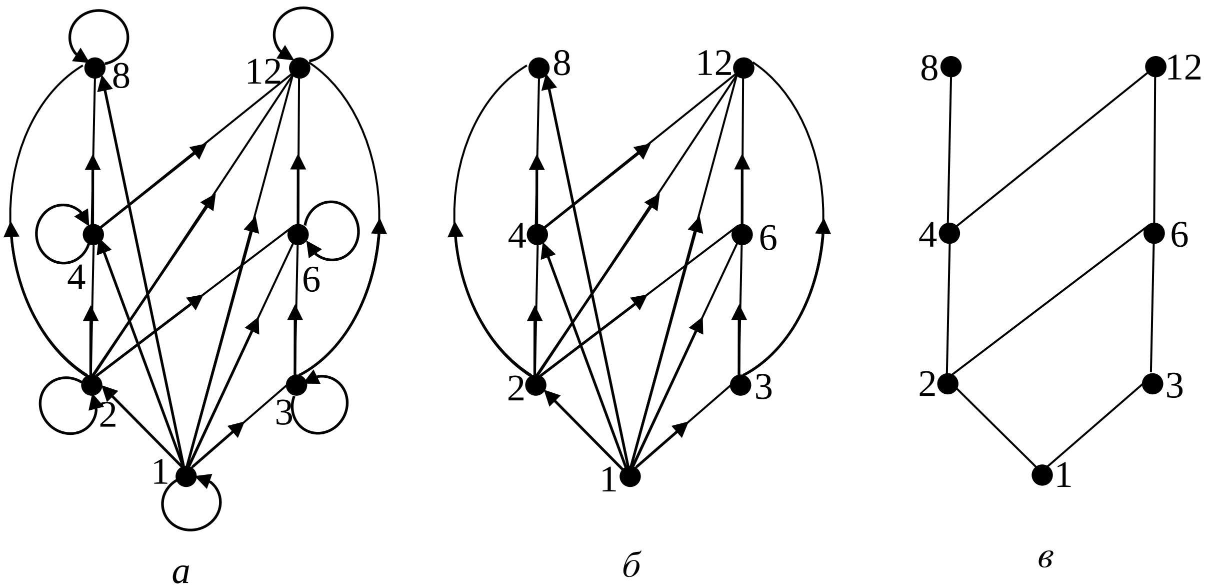

Рис. 4

Символом $\le$ часто позначають довільне відношення часткового порядку: у частково впорядкованій множині (A, R) запис $a \le b$ означає, що $(a,b) \in R$. Використовують також запис $a < b$, який означає, що $a \le b$, але $a \ne b$. Коли $a < b$, то кажуть, що *a передує b* (a менше, ніж b) або *b виходить* з a (b більше ніж a). Елемент $b \in A$ *безпосередньо виходить* з $a \in A$ тоді й лише тоді, коли $a < b$ і не існує такого елемента $u \in A$, що $a < u < b$. У такому разі також елемент *a безпосередньо передує* елементу b.

Є алгоритм, який дає змогу побудувати діаграму Гассе для частково впорядкованої множини без використання графа відношення. Цей алгоритм ґрунтується на такій властивості. Нехай (A, R) – скінченна частково впорядкована множина; тоді $a_1 < a_n$ у тому й лише тому разі, якщо існує послідовність $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, у якій a_{i+1} безпосередньо виходить з a_i для $i = \overline{1, n-1}$. Зобразимо кожний елемент $a_i \in A$ точкою a_i на площині й розглянемо всі впорядковані пари (a_i, a_j). Точку a_j розмістимо вище точки a_i тоді й лише тоді, коли $a_i < a_j$, і з'єднаємо точки a_i та a_j лінією, якщо a_j безпосередньо виходить з a_i. Одержимо діаграму Гассе; у ній існує шлях, який веде від точки a_n до точки a_m, якщо $a_n < a_m$.

Елементи частково впорядкованих множин, які мають певні екстремальні властивості, дуже важливі в багатьох застосуваннях.

Означення. Елемент частково впорядкованої множини називають *максимальним,* якщо він не менший за будь-який елемент цієї множини.

Отже, a – максимальний елемент частково впорядкованої множини (A, R), якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $a < b$.

Означення. Елемент називають *мінімальним,* якщо він не більший за будь-який елемент частково впорядкованої множини.

Отже, елемент a – мінімальний, якщо не існує такого елемента $b \in A$, що $b < a$.

Максимальні та мінімальні елементи легко визначити на діаграмі Гассе: це, відповідно, “верхні” й “нижні” її елементи (для “верхніх” елементів немає висхідних ребер, а “нижніх” – низхідних).

Приклад 16. На множині $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ задано відношення часткового порядку $R = \{(a, b) | a \text{ ділить } b\}$. Знайдемо максимальні й мінімальні елементи множини (A, R). Діаграму Гассе для цієї множини зображено на рис. 5.

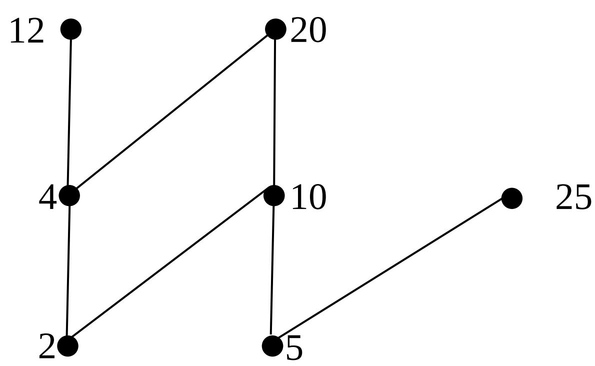

Рис. 5

Із неї доходимо висновку, що максимальні елементи – 12, 20 і 25, а мінімальні – 2 та 5.

Цей приклад свідчить, що частково впорядкована множина може мати більше одного максимального чи мінімального елемента.

§ 4. Топологічне сортування.

Хороший приклад використання частково впорядкованих множин – процес топологічного сортування. Мається на увазі сортування елементів, для яких визначено відношення часткового порядку, тобто порядок задано не для всіх, а лише для деяких пар. Із цілком зрозумілих міркувань будемо вважати, що частково впорядкована множина, яка підлягає топологічному сортуванню, скінченна. Частковий порядок можна подати у вигляді діаграми Гассе, як це показано в параграфі 3. Мета топологічного сортування – перетворити частковий порядок на лінійний.

Почнемо з означення.

Означення. Лінійний порядок $\leq$ називають *сумісним* із частковим порядком R якщо з aRb випливає $a \leq b$.

Означення. Побудову лінійного порядку, сумісного із заданим частковим порядком, називають *топологічним сортуванням.*

Наведемо два приклади застосування топологічного сортування.

1. Певна задача (наприклад, технічний проект) розпадається на низку підзадач. Виконання деяких підзадач можливе лише після завершення інших. Якщо підзадачу v потрібно виконати до підзадачі w, то будемо писати $v < w$. Топологічне сортування означає такий розподіл робіт, за якого кожна з підзадач не розпочнеться до завершення всіх підзадач, які потрібно виконати до неї.
2. В університетських програмах певні курси потрібно читати раніше за інші, бо останні ґрунтуються на попередньо викладеному матеріалі. Якщо для курсу w потрібно спочатку ознайомитись із курсом v, то пишемо $v < w$. Тут топологічне сортування означає, що жоден курс не можна читати раніше, ніж ті, що його підтримують.

Теорема 3. Кожна скінченна непорожня частково впорядкована множина (A, R) має принаймні один мінімальний елемент.

Доведення. Виберемо з множини A елемент a_0. Якщо він не мінімальний, то існує такий елемент a_1, що $a_1 < a_0$. Якщо елемент a_1 не мінімальний, то існує такий елемент a_2, що $a_2 < a_1$. Продовжимо цей процес: якщо елемент a_k не мінімальний, то існує такий елемент a_{k+1}, що $a_{k+1} < a_k$. Оскільки множина скінченна, то описаний процес закінчиться на мінімальному елементі a_m. Теорему доведено.

Опишемо роботу алгоритму топологічного сортування для довільної непорожньої частково впорядкованої множини (A, R). Спочатку виберемо мінімальний елемент a_1 (він існує за теоремою 3). Множина ($A \backslash \{a_1\}$, R) також частково впорядкована. Якщо вона непорожня, то виберемо з неї мінімальний елемент a_2. Вилучимо a_2; якщо ще залишились елементи, то виберемо мінімальний елемент a_3 з $A \backslash \{a_1, a_2\}$. Продовжимо процес вибору мінімального елемента a_{k+1} з $A \backslash \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, доки залишаються елементи.

Позаяк A – скінченна множина, то цей процес завершиться. Одержимо послідовність елементів a_1, a_2, ..., a_n. Шуканий лінійний порядок задають так:

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n .$$

Цей лінійний порядок сумісний із заданим частковим порядком. Щоб у цьому переконатись зазначимо, що коли $b < c$ в заданому частковому впорядкуванні, то c вибирають як мінімальний елемент у момент роботи алгоритму, коли елемент b уже вилучено, бо інакше c не був би мінімальним елементом. Якщо є декілька мінімальних елементів, вибираємо будь-який. Дамо формальний опис алгоритму.

Алгоритм топологічного сортування:

Крок 1. Ініціалізація. Виконати k:=1.

Ітерація.

Крок 2. Виконати a_k:= мінімальний елемент множини A.

Крок 3. Виконати A:=$A \backslash \{a_k\}$.

Крок 4. Виконати k:=k + 1.

Крок 5. Закінчення. Якщо $A = \varnothing$, то зупинитись (a_1, a_2, ..., a_n – результат топологічного сортування множини A).

Інакше перейти до кроку 2.

Приклад 17. У комп'ютерній компанії згідно з якимось проектом потрібно виконати сім завдань. Деякі з них можна розпочати лише після завершення певних інших завдань. Частковий порядок на множині завдань задамо так: $X < Y$, якщо завдання Y не можна розпочати до завершення завдання X. Діаграму Гассе для множини цих завдань подано на рис. 6. Потрібно знайти порядок, у якому ці завдання можна виконати для завершення всього проекту.

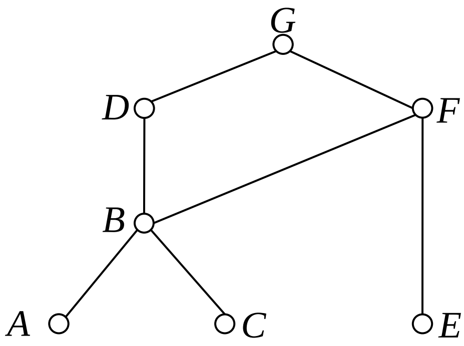

Рис. 6

Очевидно, порядок виконання цих завдань можна дістати, виконавши топологічне сортування множини всіх завдань. Послідовність кроків такого сортування наведено на рис. 7. Результат цього сортування A < С < B < E < F < D < G визначає можливий порядок виконання завдань.

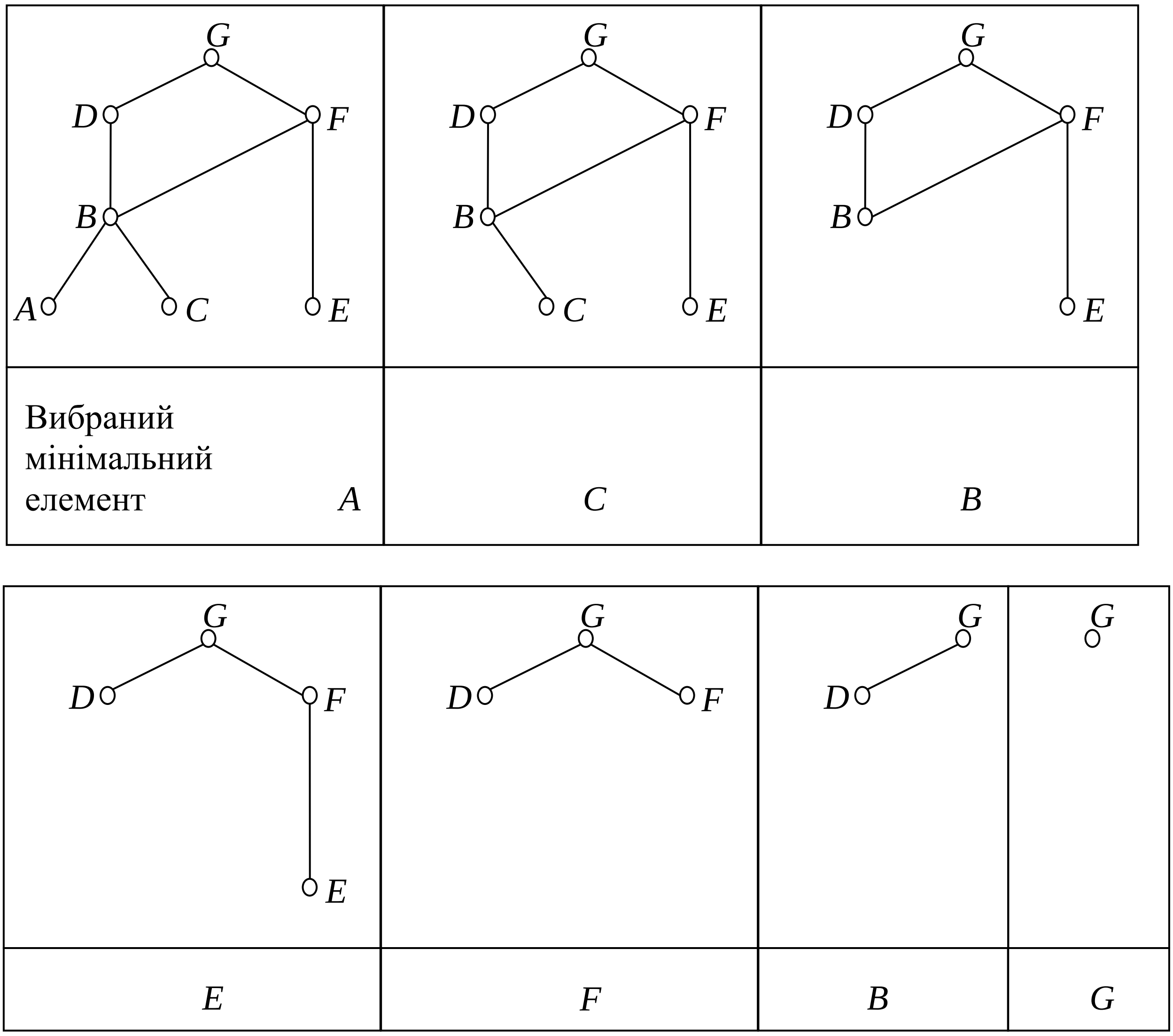

Рис. 7

§ 5. Операції над відношеннями.

5.1. Теоретико-множинні операції. Композиція відношень.

Оскільки відношення з множини A в множину B – підмножина декартового добутку $A\times B$, то над будь-якими двома відношеннями з A в B можна виконувати звичайні теоретико-множинні операції.

Приклад 18. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Визначимо відношення R_1 та R_2 з A в B: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$. Тоді

$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$;

$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$;

$R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$;

$R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Розглянемо тепер операцію іншого типу – композицію відношень.

Нехай R – відношення із множини A в множину B, а S – відношення із множини B в множину C.

Означення. *Композицією* відношень R і S називають відношення, яке складається з усіх можливих упорядкованих пар (a, c), де $a\in A$, $c\in C$, для яких існує такий елемент $b\in B$, що $(a,b)\in R$ і $(b,c)\in S$. Композицію відношень R та S позначають як $S\circ R$ (ми пишемо справа перше з двох відношень, які беруть участь у композиції).

Приклад 19. Знайдемо композицію відношень R і S,
де R – відношення з множини $A = \{1, 2, 3\}$ в множину $B = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\};$$

S – відношення з множини B в множину $C = \{0, 1, 2\}$:

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Композицію $S\circ R$ будують, використовуючи всі впорядковані пари з відношень R і S такі, що другий елемент пари з R збігається з першим елементом пари з S. Наприклад, пари $(2,3)\in R$ та $(3,1)\in S$ породжують пару $(2,1)\in S\circ R$. Виконуючи описані дії отримаємо: $S\circ R=\{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$.

Нехай R – відношення на множині A. Степінь R^n, $n = 1, 2, 3$ ..., означають за допомогою рекурсії: $R^1 = R$, $R^{n+1}=R^n\circ R$.

Отже, зокрема $R^2=R\circ R$, $R^3=R^2\circ R=(R\circ R)\circ R$.

Приклад 20. Нехай на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо R^n, $n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно отримаємо:

$R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$,

$R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,

$R^4 = R^3 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,

тобто $R^4 = R^3$. Можна переконатись, що $R^5 = R^4$.

Теорема 4. Нехай R – транзитивне відношення на множині A. Тоді $R^n \subset R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. У разі $n = 1$ твердження теореми тривіальне. Гіпотеза індукції: $R^n \subset R$. Для завершення доведення потрібно переконатись, що із цієї гіпотези випливає включення $R^{n+1} \subset R$. Припустимо, що $(a,b) \in R^{n+1}$. Оскільки $R^{n+1} = R^n \circ R$, то існує такий елемент $x \in A$, що $(a,x) \in R$ та $(x,b) \in R^n$. За індуктивною гіпотезою $R^n \subset R$, звідки випливає, що $(x,b) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a,x) \in R$ та $(x,b) \in R$ випливає, що $(a,b) \in R$. Отже, $R^{n+1} \subset R$.

Уведемо операції над булевими матрицями (тобто матрицями з елементами 0 і 1).

Означення. *Диз'юнкція булевих $m \times n$ матриць P та Q* – це $m \times n$ матриця $Z = P \vee Q$, елементи якої $z_{ij} = p_{ij} \vee q_{ij}$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Означення. *Кон'юнкція булевих $m \times n$ матриць P та Q* – це $m \times n$ матриця $Z = P \wedge Q$, елементи якої $z_{ij} = p_{ij} \wedge q_{ij}$, де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай P – $m \times k$ матриця, Q – $k \times n$ матриця.

Означення. *Булевий добуток* матриць P *та* Q – це $m \times n$ матриця $Z = P \odot Q$, елементи якої

$$z_{ij} = (p_{i1} \wedge q_{1j}) \vee (p_{i2} \wedge q_{2j}) \vee \ldots \vee (p_{ik} \wedge q_{kj}) = \bigvee_{r=1}^{k} (p_{ir} \wedge q_{rj}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

Означення. *Булевий степінь для булевих $n \times n$ матриць* (позначають як $A^{[r]}$, $r \in \mathbb{N}$) означають так: $A^{[r]} = \underbrace{A \odot A \odot \ldots \odot A}_{r \quad разів}$.

Це означення коректне, оскільки булевий добуток матриць асоціативний. За означенням уважають $A^{[0]} = I_n$, де I_n – одинична $n \times n$ матриця.

Операції над відношеннями легко виразити через матриці, які задають ці відношення:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2},$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2},$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S,$$

$$M_{R^k} = (M_R)^{[k]}.$$

Контрольні запитання

1. Що називають бінарним відношенням?
2. Дати визначення матриці, що задає відношення на деякій множині.
3. Описати побудову графа, асоційованого з відношенням.
4. Яке відношення називають рефлексивним, іррефлексивним?
5. Яке відношення називають симетричним, антисиметричним?
6. Яке відношення називають асиметричним?
7. Яке відношення називають транзитивним?
8. Дати визначення відношення еквівалентності.
9. Що називають класом еквівалентності за деяким відношенням?
10. Як відношення еквівалентності пов'язане з розбиттям множини?
11. Дати визначення відношення часткового порядку.
12. Які два елементи називають порівнюваними, непорівнюваними?
13. Дати визначення лінійного відношення часткового порядку.
14. Описати побудову діаграми Гассе для подання відношення часткового порядку.
15. Пояснити поняття безпосереднього виходу одного елемента з іншого та безпосереднього передування одного елемента над іншим.
16. Дати визначення максимального та мінімального елементів частково впорядкованої множини.
17. Що називають топологічним сортуванням?
18. Що називають композицією двох відношень?
19. Описати операції диз'юнкції та кон'юнкції булевих матриць.

20. Що називають булевим добутком?

21. Як операції над відношеннями виражають через матриці?

Розробила
доцент кафедри прикладної математики і механіки
к. ф.-м. наук Чмир О.Ю.