

Лекція 9

Визначений інтеграл.

План

1. Поняття визначеного інтеграла.
2. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.
3. Методи обчислення визначених інтегралів.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Поняття визначеного інтеграла.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано функцію $y = f(x) \geq 0$.

Означення. Фігура $aABb$, обмежена графіком функції $y = f(x)$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$, називається *криволінійною трапецією* (рис. 1).

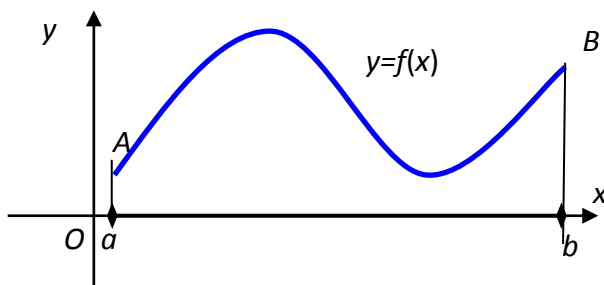


Рис. 1. Криволінійна трапеція

Знайдемо її площу, що допоможе нам сформулювати означення визначеного інтеграла.

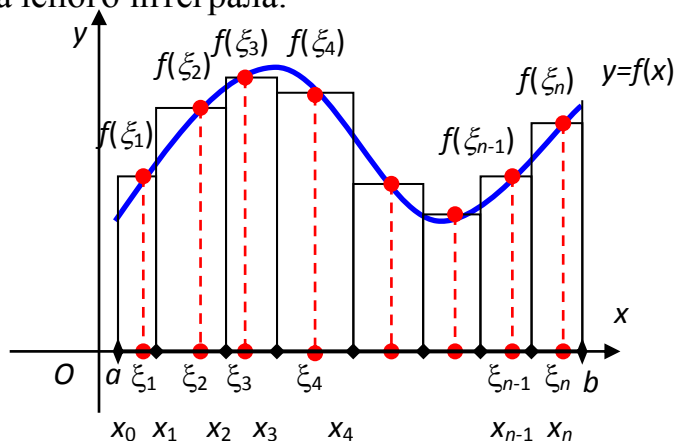


Рис.2. Розбиття криволінійної трапеції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому відрізку $[a, b]$. Проведемо *розбиття* відрізка $[a, b]$ на n частин, не обов'язково рівних між собою (**рис. 2**), тобто

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Пронумеруємо ці відрізки і позначимо кожен відрізок розбиття $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$. Довжиною i -го відрізка буде величина $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$). *Параметром розбиття* назовемо величину

$$\delta = \max\{\Delta x_i, i=1, 2, \dots, n\}.$$

Виберемо в кожному з відрізків Δ_i довільним чином точку ξ_i . Тоді розбиття відрізка $[a; b]$ буде називатися *розбиттям з відміченими точками*. Обчислимо значення функції в кожній точці ξ_i , яке буде дорівнювати $f(\xi_i)$.

Перемножимо значення функції у відміченій точці на довжину відповідного відрізка. Відомо, що добуток $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ дорівнює площі прямокутника шириною Δx_i і висотою $f(\xi_i)$.

Одержимо

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Просумуємо ці добутки і одержимо суму

$$\sigma_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n.$$

Ця сума – площа ступінчастої фігури, яка складається з прямокутників та наближено дорівнює площі криволінійної трапеції.

Позначимо цю суму як

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Така сума називається *інтегральною сумою*.

Із зменшенням всіх величин Δx_i точність цієї формули буде зростати, тому за площу криволінійної трапеції вважаємо границю площі ступінчастої фігури, тобто якщо ми будемо збільшувати кількість відрізків розбиття таким чином, що параметр розбиття $\delta \rightarrow 0$ і буде існувати границя інтегральних сум, тобто $\sigma_n \rightarrow A$ при $\delta \rightarrow 0$, то одержимо формулу площі криволінійної трапеції.

Означення. Якщо для функції $y = f(x)$ на $[a, b]$ існує границя

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I,$$

яка не залежить від способу розбиття і від вибору точок ξ_i на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, то ця границя буде називатися *визначенням інтегралом функції $f(x)$ на $[a, b]$* .

Визначений інтеграл позначається

$$\int_a^b f(x)dx,$$

де $f(x)$ – *підінтегральна функція* на $[a, b]$; a, b – *нижня та верхня межі інтегрування*; $\int$ – *знак інтеграла*; $f(x)dx$ – *підінтегральний вираз*; x – *змінна інтегрування*; $[a, b]$ – *проміжок інтегрування*.

Означення. Функція $f(x)$ є *обмеженою на відрізку* $[a, b]$, якщо існує $M \in \mathbf{R}$ таке, що $|f(x)| < M$ для всіх $x \in [a, b]$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *інтегрованою на проміжку* $[a, b]$, якщо для неї на цьому проміжку існує скінченна границя інтегральних сум, яка не залежить ні від способу розбиття проміжку $[a, b]$, ні від вибору точок ξ_i .

Сформулюємо *умови інтегровності* функції $f(x)$ у вигляді теорем.

Теорема 1.1. (Необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то вона обмежена на цьому проміжку.

Теорема 1.2. (Достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 1.3. Довільна обмежена та монотонна на відрізку $[a, b]$ функція є інтегровна на цьому відрізку.

2. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює 0:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Від перестановки меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

□ Властивості 2, 3 випливають з означення визначеного інтеграла. ■

4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, $a < c < b$, тоді справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Ця властивість називається *адитивністю визначеного інтеграла*.

5. Визначений інтеграл від суми інтегровних функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

6. Сталій множник c можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx .$$

Властивості 5, 6 називаються *лінійністю визначеного інтеграла*.

7. Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

8. Якщо на відрізку $[a, b]$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(*монотонність визначеного інтеграла*).

9. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$ ($a < b$), то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

10. Якщо для довільного $x \in [a, b]$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$, (C – дійсне число), то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq C(b-a) .$$

11. Якщо m і M – мінімальне та максимальне, відповідно, значення функції $f(x)$ на $[a, b]$ ($a < b$), то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

(*оцінки інтеграла по області*).

12. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то на цьому проміжку знайдеться така точка c , що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(*теорема про середнє значення функції*).

13. Якщо змінити значення інтегровної функції в скінченій кількості точок відрізка інтегрування, то її інтегровність не порушується та не зміниться значення інтеграла.

Зауважимо, що деякі з властивостей є подібними до відомих *властивостей невизначеного інтеграла*, а деякі є цілком новими.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної *криволінійної трапеції* (рис. 2).

Таким чином, визначений інтеграл – це число, яке необхідно обчислювати.

Зауважимо, що у шкільному курсі алгебри та початків аналізу вивчалось поняття визначеного інтеграла, який обчислювався за формулою

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Ця формула носить назву *формули Ньютона-Лейбніца* і використовується для обчислення визначеного інтеграла. Значення, одержане з допомогою цієї формули збігатиметься із значенням границі інтегральних сум.

Отже, визначений інтеграл – це число, яке обчислюється як границя інтегральних сум або за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

3. Методи обчислення визначених інтегралів

1. Метод безпосереднього інтегрування

Для обчислення визначених інтегралів цим методом ми використовуємо формулу Ньютона-Лейбніца. Крім цієї формули використовуємо властивості визначених інтегралів та таблицю невизначених інтегралів.

Приклад. Обчислити

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx .$$

□ За формулою Ньютона-Лейбніца та властивістю 5 одержимо

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = 3\frac{1}{3} . \blacksquare$$

Якщо не вдається обчислити інтеграл таким методом, тоді використовуються інші: *метод підстановки* та *метод інтегрування частинами*.

2. Метод підстановки

Цей метод подібний до методу підстановки для невизначеного інтеграла, проте має деякі особливості. Розглянемо теорему:

Теорема 1.4. Нехай виконуються умови:

1. функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$;
2. функція $x = \varphi(t)$ на цьому відрізку має неперервну похідну;
3. функція $x = \varphi(t)$ відображає відрізок $[\alpha, \beta]$ на відрізок $[a, b]$ так, що $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Тоді справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

□ Доведення цієї теореми ґрунтується на застосуванні формули Ньютона-Лейбніца.

Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$. Розглянемо складену функцію $F(\varphi(t))$. Оскільки похідна складеної функції

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

тоді ця функція є первісною функції $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, яка неперервна на $[\alpha, \beta]$.

Використовуючи для цієї функції формулу Ньютона-Лейбніца, одержуємо:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$



Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^3 x \sqrt{x^2 + 3} dx$.

□ У визначеному інтегралі $\int_1^3 x \sqrt{x^2 + 3} dx =$

1. замінюємо підінтегральний вираз на нову змінну

$$x^2 + 3 = t,$$

2. знаходимо диференціал лівої та правої частин:

$$d(x^2 + 3) = dt,$$

$$2x dx = dt,$$

3. замінюємо

$$x dx = dt/2,$$

4. знаходимо нові межі інтегрування:

x	1	3
t	4	12

5. в інтегралі замінюємо змінну та межі інтегрування

$$= \int_4^{12} \sqrt{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_4^{12} t^{\frac{1}{2}} dt =$$

6. обчислюємо визначений інтеграл для нової змінної і нових меж інтегрування

$$= \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{12} = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{12} = \frac{1}{3} \left((2\sqrt{3})^3 - 2^3 \right) = \frac{8}{3} (3\sqrt{3} - 1). \blacksquare$$

Зауваження 1. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла методом підстановки з заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x , то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \varphi(t)$ відносно змінної t , а верхня межа β – з рівняння $b = \varphi(t)$.

Якщо функція $\varphi(t)$ не монотонна, то може статися, що ці рівняння дадуть декілька різних пар α і β , що задовольняють останню теорему. В цьому випадку можна взяти довільну пару розв'язків.

Зауваження 2. Часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \psi(x)$, тоді нові межі інтегрування визначають безпосередньо: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Проте треба враховувати те, що функція $x = \varphi(t)$, обернена до функції $\psi(t)$ повинна як і раніше задовольняти всі умови теореми 1.4, тобто функція $\varphi(t)$ в межах інтегрування має бути визначена, неперервна, диференційовна відносно t і при заміні t від α до β змінна $x = \varphi(t)$ змінюється від a до b .

Найзручніше виконувати заміну з використанням монотонної диференційовної функції, бо вона гарантує однозначність як прямої, так і оберненої функції.

Приклади. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

□ а) Застосуємо метод підстановки:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right| = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

б) Замінімо підкореневий вираз через t^2 :

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2 \\ e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt \end{array} \right| = 2 \int_0^2 \frac{t(t^2 + 1) dt}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)} = 2 \int_0^2 \frac{(t^2 + 4 - 4) dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt =$$

$$= 2 \left(t - 2 \arctan \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 - 4 \frac{\pi}{4} = 4 - \pi. \quad \blacksquare$$

3. Метод інтегрування частинами

Розглянемо метод *інтегрування частинами* обчислення визначеного інтеграла.

Теорема 1.5. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a; b]$. Тоді справедлива така формула

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx,$$

або

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Ця формула носить назву *формула інтегрування частинами* та є аналогом відповідної формули інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

□ Розглянемо добуток функцій u та v . Знайдемо похідну добутку $(u \cdot v)' = u'v + v'u$, тобто функція $u \cdot v$ є первісною для функції $u'v + v'u$, тоді за формулою Ньютона–Лейбніца одержимо

$$\int_a^b (u'v + uv') dx = uv \Big|_a^b.$$

За властивістю 5 визначеного інтеграла маємо:

$$\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad \blacksquare$$

Таким чином, виведено формулу інтегрування частинами. Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int_a^b u dv$ до обчислення іншого інтеграла $\int_a^b v du$

Іноді формулу інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

Методом інтегрування частинами обчислюють інтеграли, підінтегральні частини яких є добутками многочлена та експоненти, синуса, косинуса, логарифма, арксинуса, арккосинуса чи арктангенса.

Приклад Обчислити інтеграл

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx.$$

□ **а)** Вибираємо $u(x) = \ln x$, а $v'(x) = x^2$. Тоді $v(x) = \frac{x^3}{3}$. Підставивши в формулу інтегрування частинами функції u і v , отримаємо:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{6}.$$

Приклад Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 x \arctg x dx$$

□ Врахувавши, що

$$u = \arctg x$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = x dx$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctg x dx &= \frac{x^2 \arctg x}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Приклад Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$$

□ Спочатку застосовуємо метод підстановки, а потім інтегруємо частинами:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt = \left| \begin{array}{l} u = t \\ dv = \sin t dt \\ du = dt \\ v = -\cos t \end{array} \right| = 2 \left(-t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = 2 \quad \blacksquare$$

Отже, визначений інтеграл – це число, одержане як границя інтегральних сум. Обчислюється визначений інтеграл за *формулою Ньютона-Лейбніца*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Основними методами обчислення означеного інтеграла є безпосереднє інтегрування з застосуванням формули Ньютона-Лейбніца та властивостей цього інтеграла, метод підстановки та інтегрування частинами.

? Контрольні запитання

1. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?
2. Що називають інтегральною сумою?
3. Що називають визначеним інтегралом?
4. Сформулюйте необхідну умову інтегровності.
5. Сформулюйте достатню умову інтегровності.
6. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
7. В чому суть методу безпосереднього інтегрування?
8. В чому особливість методу інтегрування за допомогою заміни змінних?
9. Запишіть формулу інтегрування частинами.
10. Опишіть класи функцій, які інтегруються частинами.