

Лекція 9

Визначений інтеграл.

План

1. Формула Ньютона-Лейбніца.
2. Методи обчислення визначених інтегралів.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) .$$

Ця формула носить назву *формули Ньютона-Лейбніца* і використовується для обчислення визначеного інтеграла. Значення, одержане з допомогою цієї формули збігатиметься із значенням границі інтегральних сум.

Отже, визначений інтеграл – це число, яке обчислюється як границя інтегральних сум або за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

Методи обчислення визначених інтегралів

1. Метод безпосереднього інтегрування

Для обчислення визначених інтегралів цим методом ми використовуємо формулу Ньютона-Лейбніца. Крім цієї формули використовуємо властивості визначених інтегралів та таблицю невизначених інтегралів.

Приклад. Обчислити

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx .$$

□ За формулою Ньютона-Лейбніца та властивістю 5 одержимо

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} + 2 - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = 3\frac{1}{3} . \blacksquare$$

Якщо не вдається обчислити інтеграл таким методом, тоді

використовуються інші: *метод підстановки* та *метод інтегрування частинами*.

Приклади.

1. Обчислимо $\int_{-1}^2 x \sin x^2 dx$.

Оскільки $\int_{-1}^2 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \sin x^2 d(x^2)$, то припустимо, що $y = x^2$. Тоді

$$\int_{-1}^2 x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sin y dy = \frac{1}{2} (-\cos y) \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (\cos 1 - \cos 4).$$

Зазначимо, що тут робити заміну $x = \sqrt{t}$ не можна, бо $\sqrt{t} \geq 0$, а в цьому інтегралі x набуває й від'ємних значень.

2. Обчислимо інтеграл від 0 до $\frac{\pi}{2}$ від функції $e^{\sin x} \cos x$

Маємо

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) = \int_0^1 e^y dy = e^y \Big|_0^1 = e - 1.$$

Тут зроблено підстановку $y = \sin x$.

Зазначимо, що цей інтеграл, як і інтеграли з прикладів 1 і 2, можна обчислити без заміни змінної інтегрування. Справді,

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) = \int_0^{\pi/2} d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} = e - 1$$

3. Обчислимо $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$.

Припустимо, що $u = x^2$, $\cos x dx = dv$, тобто $v = \sin x$, і застосуємо формулу:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin x dx = -2 \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

До знайденого інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \int_0^{\pi} x d(-\cos x) = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi .$$

Отже,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2\pi$$

Завдання для самопідготовки:

Обчисліть інтеграли

а) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1};$

б) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}};$

в) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx;$

г) $\int_0^1 x e^{-x} dx;$

д) $\int_0^1 x e^{3x} dx;$

е) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx;$

є) $\int_1^e \ln^2 x dx .$