

Лекція 10

Застосування визначеного інтеграла.

План

1. Обчислення площ плоских фігур.
2. Обчислення площі криволінійного сектора.
3. Обчислення довжини кривої.
4. Обчислення координат центра мас плоскої фігури.
5. Обчислення об'ємів тіл обертання.
6. Обчислення площ поверхонь тіл обертання.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

Основним застосуванням визначеного інтеграла є обчислення площ плоских фігур. Крім цього, з допомогою визначеного інтеграла можна обчислювати довжини кривих, площі поверхонь фігур, об'єми тіл обертання, координати центра мас, що використовуються під час розв'язування прикладних задач.

1. Обчислення площ плоских фігур.

Геометричний зміст визначеного інтеграла – це площа криволінійної трапеції, яка утворена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox , прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 1).

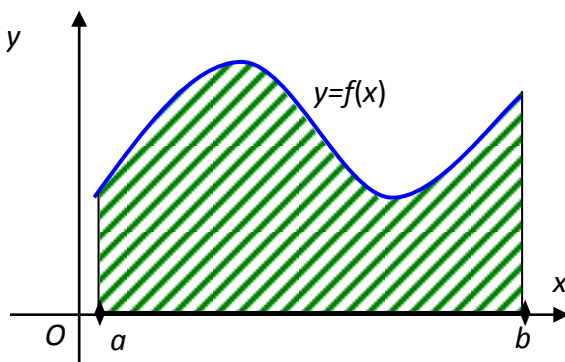


Рис. 1. Криволінійна трапеція

У даному випадку площа криволінійної трапеції обчислюватиметься за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо потрібно знайти площу фігури, обмеженої двома графіками функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$ (рис. 2) та вертикальними прямими $x = a$, $x = b$, використовують формулу, яка отримується з властивостей визначеного інтеграла:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

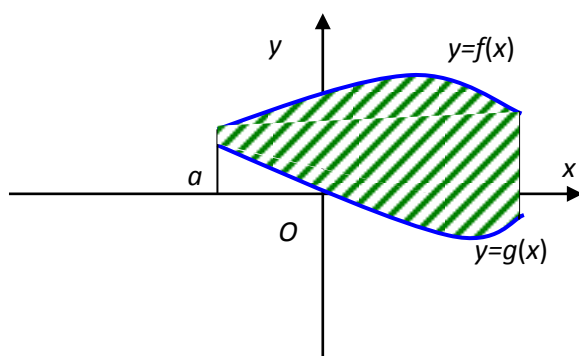


Рис. 2. Фігура, обмежена графіками двох функцій

В окремих випадках ліва границя $x=a$ (чи права границя $x=b$) може виродитися в точку перетину кривих $y=f(x)$, $y=g(x)$. У цьому величини a та b знаходяться як абсциси точок перетину вказаних кривих (рис. 3.).

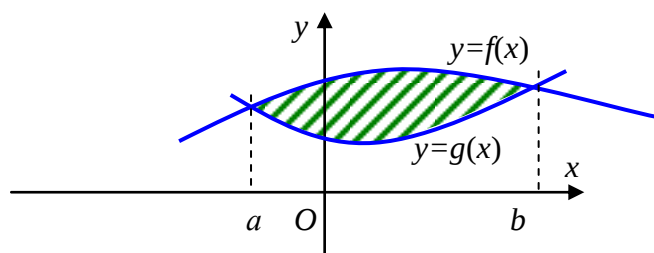


Рис. 3. Фігура, обмежена графіками двох функцій

У випадку складних фігур для обчислення їх площ розбиваємо їх на прості фігури і до кожної застосовуємо одну з вказаних вище формул.

Отже, ці формули дають змогу обчислити площі плоских фігур, якщо відомі функції, які задають межі фігур на площині.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ (рис. 4).

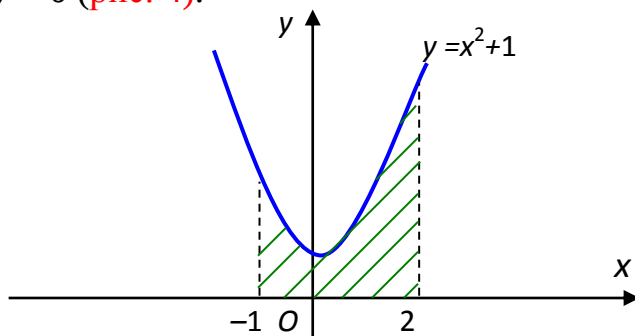


Рис. 4. Знаходження площі фігури

□ Згідно з рис. 4 та відповідною формулою площі криволінійної трапеції маємо

$$S = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) + \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) = \frac{9}{3} + 3 = 6. \blacksquare$$

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $x = -\pi/2$, $x = \pi$, $y = 0$ (рис. 5).

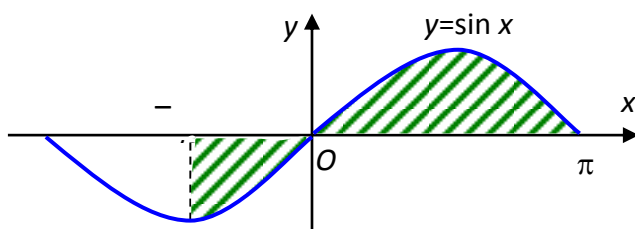
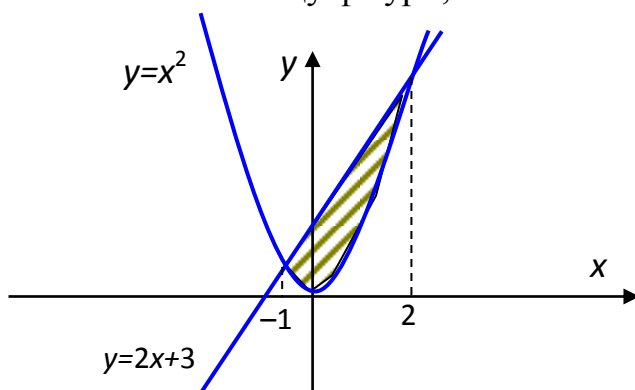


Рис. 5. Знаходження площі фігури

□ Оскільки фігура складається з двох частин, то розбиваємо її площу на суму площ кожної фігури, до кожної з яких застосуємо відповідні формули:

$$S = - \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{-\pi/2}^0 - \cos x \Big|_0^{\pi} = 3 \blacksquare$$

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2x + 3$ (рис. 6).



□ Знайдемо точки перетину графіків, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Розв'язками системи є точки $x = -1$, $x = 2$. Тоді площа фігури обчислюється за наступною формулою:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (2x + 3 - x^2) dx = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(2^2 + 6 - \frac{2^3}{3} \right) - \left((-1)^2 - 3 - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 12 - 3 = 9 \end{aligned}$$

Отже, наведені приклади ілюструють порядок обчислення площ фігур з допомогою визначеного інтеграла.

2. Обчислення площі криволінійного сектора

Розглянемо плоску фігуру OAB , обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис. 7).

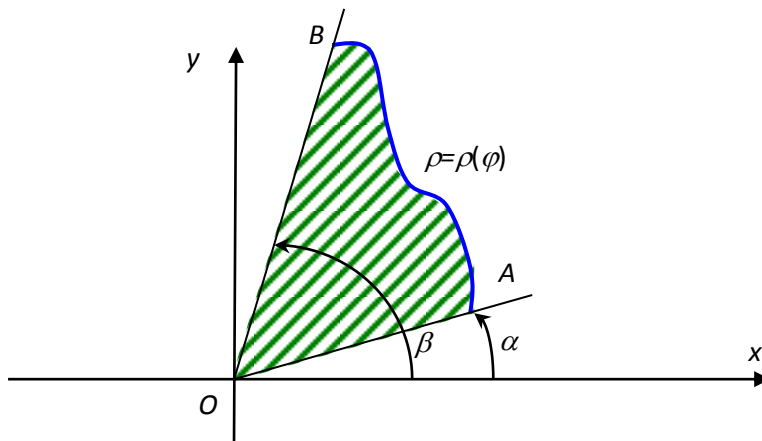
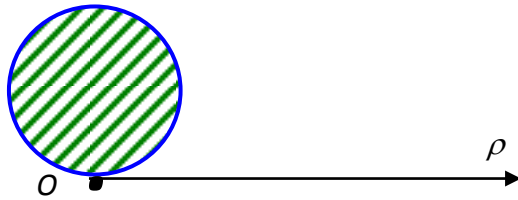


Рис. 7. Криволінійний сектор

Таку фігуру називають **криволінійним сектором** і його площу обчислюють за формулою :

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад. Знайти площу круга, заданого полярними координатами $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$.



Так як круг лежить вище осі Ox (полярної осі) , то значення кута φ змінюється від 0 до π . Тому згідно із формулою знаходження площі криволінійного сектора маємо:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 3 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{3}{4} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi.$$

3. Обчислення довжини кривої.

Нехай крива є графіком функції $y = f(x)$. Тоді її довжина на відрізку $[a, b]$ (рис. 8) визначається за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

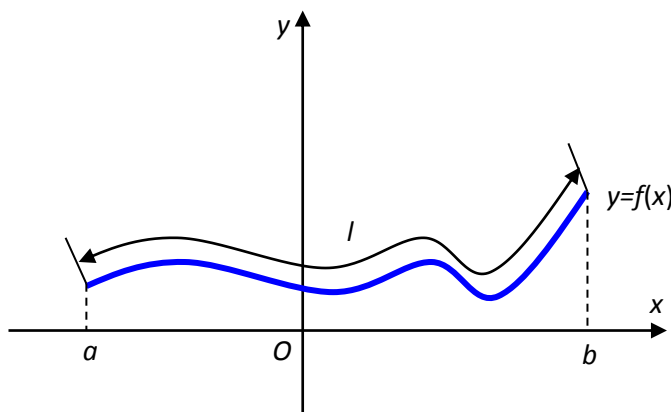


Рис. 8. Довжина кривої

Нехай крива є графіком функції $x = g(y)$. Тоді її довжина на відрізку $[c, d]$ визначається за формулою:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy .$$

Для кривої, заданої параметричним способом, тобто $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$, її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2} dt .$$

Нехай крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ в полярних координатах. Тоді її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln \cos x$, обмеженої точками з абсцисами $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

□ Так як $y' = -\tan x$, то $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos x}$.

Маємо:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \tan \frac{3}{8}\pi. \blacksquare$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої, заданої параметрично:
 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

□ Так як $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$, $y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$, то

$$\sqrt{(y'_t)^2 + (x'_t)^2} = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} = 3a |\sin t \cos t| = \frac{3a}{2} |\sin 2t|$$

Так як функція $|\sin 2t|$ має період $\frac{\pi}{2}$, то

$$l = 4 \frac{3a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a. \blacksquare$$

4. Обчислення координат центра мас плоскої фігури.

Нехай маємо плоску фігуру сталої густини, обмежену лініями $y = f_2(x)$ та $y = f_1(x)$, і яка проектується на вісь Ox у відрізок $[a, b]$ (рис. 9) *Координати центра мас* цієї фігури визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}, \quad y_c = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx}.$$

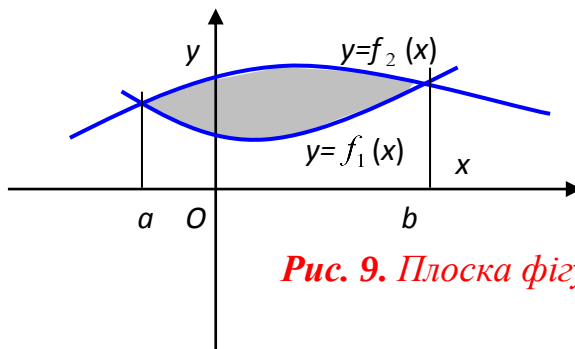
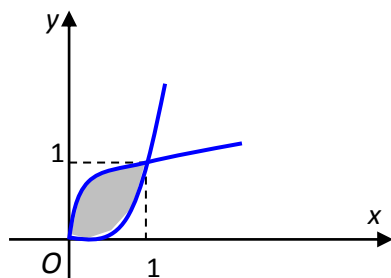


Рис. 9. Плоска фігура

Приклад. Обчислити координати центра мас фігури обмеженої лінією $y = x^2, y = \sqrt{x}$.



□ Використовуючи формули координат центра мас та метод безпосереднього інтегрування, одержуємо:

$$x_c = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx} = \frac{9}{20}, \quad y_c = \frac{1}{2} \frac{\int_0^1 (x - x^4)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx} = \frac{9}{20} \quad \blacksquare$$

5. Обчислення об'ємів тіл обертання.

Нехай крива є графіком функції $y=f(x)$. Тоді при обертанні кривої навколо осі абсцис (вісь Ox) утворюється **тіло обертання** (рис. 10), об'єм якого визначається за формулою

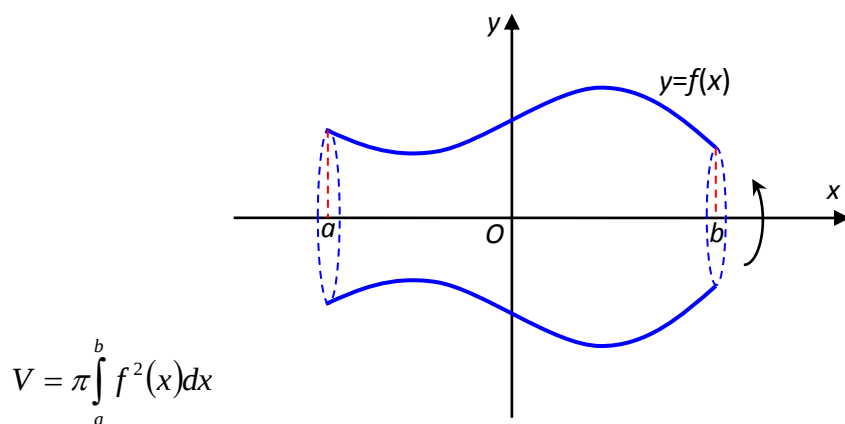
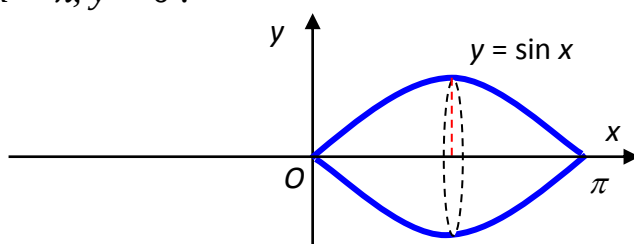


Рис. 10. Тіло обертання

Приклад. Знайти об'єм тіла обертання, обмеженого лініями $y = \sin x, x = 0, x = \pi, y = 0$.



□ Згідно з формулою об'єму тіла обертання маємо:

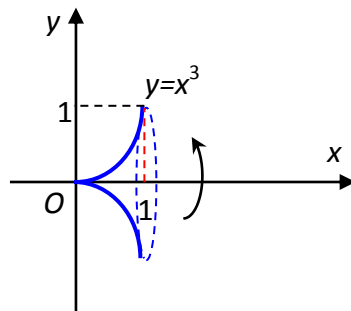
$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \quad \blacksquare$$

6. Обчислення площ поверхонь тіл обертання.

Нехай крива є графіком функції $y=f(x)$. Тоді при обертанні кривої навколо осі абсцис (вісь Ox) утворюється тіло, площу бічної поверхні якого (поверхні обертання) можна визначити за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Приклад. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням кубічної параболі $y=x^3$, при $x \in [0; 1]$



□ Знайдемо похідну: $y' = 3x^2$.

Обчислимо

$$Q = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \left| \begin{matrix} t = 1 + 9x^4 \\ dt = 36x^3 dx \end{matrix} \right| = 2\pi \int_1^{10} \sqrt{t} \frac{dt}{36} = \frac{2\pi}{36} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \frac{\pi}{27} \sqrt{t^3} \Big|_1^{10} \approx 3,56. \quad \blacksquare$$

? Контрольні запитання

1. Сформулюйте геометричний зміст визначеного інтеграла.
2. Проаналізуйте формулу обчислення площі криволінійної трапеції, коли вона обмежена двома функціями.
3. Як обчислити площі складних фігур, обмежених декількома функціями?
4. Як обчислити площу криволінійного сектора?
5. Запишіть формули для обчислення довжини дуги кривої в залежності від способів її задання.
6. Запишіть формули для обчислення координат центра мас.

7. Як за допомогою визначеного інтеграла обчислити об'єм тіл обертання?
8. Запишіть формулу для знаходження площі поверхні тіла обертання.