

Лекція 11

Невласні інтеграли.

План

1. Невласні інтеграли I роду.

2. Невласні інтеграли II роду.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Невласні інтеграли I роду.

Під час введення поняття визначеного інтеграла, ми його шукали як границю інтегральних сум, при цьому вважалось, що відрізок інтегрування є скінченний, а підінтегральна функція на цьому ж відрізку обмежена. Якщо порушується одна або друга з цих умов, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним: коли проміжок інтегрування є нескінченний, то його не можна розбити на n частин скінченної довжини, а у випадку необмежених функцій інтегральна сума може не мати скінченної границі. Узагальнимо поняття визначеного інтеграла, ввівши поняття *невласних інтегралів*, тобто інтегралів від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Розглянемо *невласні інтеграли з нескінченними межами*.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$, інтегровна на будь-якому проміжку $[a, b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Якщо існує границя:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

то її називають *невласним інтегралом I роду* і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (2)$$

Таким чином

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (3.)$$

Якщо існує скінченна границя, то інтеграл (3) називається *збіжним*, а підінтегральна функція $f(x)$ – інтегровною на $[a, +\infty)$.

Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл (3.), називається *розбіжним*, а функція $f(x)$ – неінтегрованою на $[a, +\infty)$.

Аналогічно до інтеграла (3.) невласним інтегралом на проміжку $(-\infty, b]$ є

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.)$$

Розглянемо інтеграл з двома нескінченними межами. Він визначається наступним чином:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (5.)$$

де c – будь-яке число. Інтеграл ліворуч у (5.) існує або є збіжним тоді, коли є збіжні обидва інтеграли праворуч.

З означень видно, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла із змінною межею інтегрування. Зауважимо, що коли функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a, +\infty)$ і коли інтеграл (5.) збігається, то вважають, що він виражає площу необмеженої області.

Приклади. Обчислити:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, б) $\int_{-\infty}^0 \sin 5x dx$,

в) $\int_0^{+\infty} 3^x dx$, г) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

□ а) За означенням

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

б) Застосувавши означення невласного інтеграла з нескінченною нижньою межею, одержуємо:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \sin 5x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \sin 5x dx = \\ &= - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{\cos 5x}{5} \Big|_a^0 = - \frac{1}{5} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\cos 0 - \cos 5a) = - \frac{1}{5} \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - \cos 5a). \end{aligned}$$

Оскільки границя не існує, то інтеграл б) розбіжний.

в) За означенням маємо:

$$\int_0^{+\infty} 3^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} \lim_{b \rightarrow +\infty} 3^x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (3^b - 3^0) = +\infty,$$

отже інтеграл також розбіжний.

г) Для інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ розглянемо окремі випадки.

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty,$$

при $\alpha = 1$ інтеграл розбіжний.

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1 \end{cases}.$$

Отже, інтеграл збіжний при $\alpha > 1$ і розбіжний при $\alpha \leq 1$. ■

У прикладах невластні інтеграли обчислювали за допомогою означення. Проте, у деяких випадках немає необхідності обчислення інтеграла, а достатньо дослідити його на збіжність (розбіжність).

Наведемо без доведення деякі теореми про збіжність невластних інтегралів.

Теорема 1. Якщо на проміжку $[a, +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx \quad (6)$$

випливає збіжність інтеграла

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \quad (7)$$

а із розбіжності (7) випливає розбіжність (6).

З точки зору геометрії ця теорема має просте пояснення: якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області також скінченне число; якщо площа меншої області – нескінченно велика величина, то площа більшої області є нескінченно велика величина.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^8 + 26}}.$$

□ Для будь-якого $x \in [1; +\infty)$ маємо

$$0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^8 + 26}} < \frac{1}{x^2}$$

Оскільки невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

збіжний, то за теоремою 1 інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^8 + 26}}$$

збіжний також. ■

Теорема 2. Якщо існує границя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

$0 < A < +\infty$, $(f(x) > 0, g(x) > 0)$, то інтеграли (6) і (7) або одночасно збігаються, або розбігаються.

Ця ознака іноді зручніша, ніж **теорема 1**, бо не потребує перевірки нерівності $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} dx.$$

□ Оскільки $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3 + 1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + 1} = 1,$$

то даний інтеграл розбіжний. ■

Розглянемо випадок, коли підінтегральна функція є знакозмінна.

Теорема 3. Якщо інтеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

збігається, то збігається і

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + 5 \sin x}{x^7} dx.$$

□ Підінтегральна функція знакозмінна, оскільки

$$\left| \frac{1 + 5 \sin x}{x^7} \right| \leq \frac{6}{x^7}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{6}{x^7} dx < +\infty,$$

то і даний інтеграл збіжний. ■

Слід зауважити, що із збіжності $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не випливає збіжність $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Означення. Якщо інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ та $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ збігаються, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, називають *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ – *абсолютно інтегровною* на проміжку $[a, +\infty)$.

Означення. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ збігається, а $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ розбігається, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, називають *умовно (неабсолютно) збіжним*.

Приклад. Дослідити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ на збіжність.

□ Оскільки

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^a = \frac{\pi}{2},$$

а

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

то за **теоремою 1**

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| dx$$

збіжний.

Отже, за **теоремою 3** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ – абсолютно збіжний. ■

2. Невласні інтеграли II роду.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, b)$.

Означення. Точка $x = b$ називається *особливою точкою* функції $f(x)$, якщо $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b-0$.

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b - \varepsilon]$ при будь-якому $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (8)$$

її називають *невласним інтегралом II роду* і позначають

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (9)$$

Отже, згідно з означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (10)$$

Якщо границя (8) існує, то інтеграл (9) збігається. Якщо ж границя (8) нескінченна або не існує, то інтеграл (9) називають невластним розбіжним інтегралом.

Аналогічно якщо $x = a$ – особлива точка, то невластний інтеграл визначається таким чином:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі будь-якої внутрішньої точки $c_0 \in (a, b)$, тоді, якщо існують невластні інтеграли $\int_a^{c_0} f(x) dx$ та $\int_{c_0}^b f(x) dx$, за означенням маємо

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_0} f(x) dx + \int_{c_0}^b f(x) dx.$$

Якщо a і b – особливі точки, то за умови існування обох невластних інтегралів $\int_a^c f(x) dx$ і $\int_c^b f(x) dx$ за означенням маємо:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

де c – довільна точка з інтервалу (a, b) .

Приклади. Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність.

$$\text{а) } \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

□ а) За означенням маємо

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{4-\varepsilon}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

б) Розглянемо два випадки.

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Якщо $\alpha \neq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1; \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, при $0 < \alpha < 1$ невластний інтеграл збіжний, а при $\alpha \geq 1$ – розбіжний. ■

Аналогічно, як для невластних інтегралів першого роду, наведемо теореми (ознаки збіжності) для невластних інтегралів другого роду.

Теорема 4. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a, b)$ неперервні, мають особливу точку $x=b$ і задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності

$$\int_a^b g(x) dx$$

випливає збіжність

$$\int_a^b f(x) dx,$$

а із розбіжності

$$\int_a^b f(x) dx$$

випливає розбіжність

$$\int_a^b g(x) dx.$$

Приклад. Дослідити на збіжність невластний інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

□ Для будь-якого $x \in (0; 1]$ виконується:

$$0 < \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[4]{x}}.$$

Невластний інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$$

збіжний, а тому за **теоремою 4** досліджуваний інтеграл також збіжний. ■

Теорема 5. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a, b)$ неперервні, додатні і мають особливу точку $x = b$, тоді якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $0 < A < +\infty$, то $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$ або одночасно збігаються, або розбігаються.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x}.$$

□ Функції $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ і $g(x) = \frac{1}{x}$ мають особливу точку $x = 0$. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 \text{ і } \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty, \text{ то за теоремою 5 інтеграл } \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x} \text{ також}$$

розбіжний. ■

Теорема 6. Якщо $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$ і $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$, то інтеграл $\int_a^b f(x)$ також збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_1^2 \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

□ Інтеграл збіжний, бо

$$\left| \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}},$$

а

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}{2} \right|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{2} \right) = \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення невласного інтеграла першого роду.
2. Які невласні інтеграли називають збіжними, а які – розбіжними?
3. За якою формулою можна обчислити невласний інтеграл першого роду?
4. Сформулюйте теореми, що дозволяють досліджувати невласні інтеграли першого роду на збіжність, не застосовуючи означення.
5. Сформулюйте означення абсолютно збіжного (умовно збіжного) невласного інтеграла першого роду.
6. Сформулюйте означення невласного інтеграла другого роду.
7. Які теореми дозволяють досліджувати невласні інтеграли другого роду на збіжність (розбіжність)?

