

# Невласні інтеграли.

## План

### 1. Невласні інтеграли I роду.

### 2. Невласні інтеграли II роду.

#### Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

### 1. Невласні інтеграли I роду.

#### Приклади.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Для розв'язування задачі розглянемо такі три випадки:

I.  $p = 1$ .  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|x|) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty$ , інтеграл розбіжний.

II.  $p < 1$ .  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-p} - 1) = +\infty$ , інтеграл розбіжний.

III.  $p > 1$ .  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} \left( b^{\frac{1}{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} (0 - 1) = \frac{1}{p-1}$ , інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при  $p > 1$  та розбіжний при  $p \leq 1$ .

### 2. Невласні інтеграли II роду.

**Приклади.** Обчислити інтеграли або довести їх розбіжність.

а)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ ;

□ а) За означенням маємо

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{4-\varepsilon}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Отже, інтеграл збіжний.

б) Обчислити  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \Rightarrow \Rightarrow x = 0 \in [-1; 1]$  — точка розриву 2-го роду

функції  $f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  — невластний.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon_2}^1 = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( -1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = +\infty + \infty = +\infty \Rightarrow$$

інтеграл

розбіжний.

### Завдання на самопідготовку

Обчисліть невластні інтеграли з необмеженими границями інтегрування:

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx;$

б)  $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x};$

в)  $\int_2^{\infty} \frac{x}{2+x^2} dx;$

г)  $\int_2^{\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx;$

д)  $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx;$

е)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx;$

є)  $\int_0^{+\infty} (x+2) \cos 2x dx;$

ж)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$

2. Дослідіть на збіжність інтеграли:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{5+3x+x^4};$

б)  $\int_1^{\infty} \frac{x+2x^4+2}{5+3x+x^4} dx;$

в)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x dx}{5+x^4};$

г)  $\int_1^{\infty} \frac{\cos x + 2}{\sqrt[3]{x^4}} dx.$

3. Обчисліть невластні інтеграли другого роду:

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2};$$

$$\text{б)} \int_1^e \frac{dx}{x \ln x};$$

$$\text{в)} \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3};$$

$$\text{г)} \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$$

$$\text{д)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}};$$

$$\text{е)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\frac{1}{x^2})}{x^3} dx.$$

4. Дослідіть на збіжність інтеграли:

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{2+3x}{x^3} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{\sqrt[3]{x+x^5}};$$

$$\text{в)} \int_0^3 \frac{dx}{2\sqrt{9-x^2}};$$

$$\text{г)} \int_0^1 \frac{x+2}{3x+x^4} dx;$$

$$\text{д)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+3x^2} dx.$$