

Лекція 12

Функції багатьох змінних.

План

1. Поняття функції двох змінних.
2. Границя функції двох змінних.
3. Неперервність функції двох змінних.
4. Частинні похідні та повний диференціал.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Поняття функції двох змінних.

Поняття функції однієї змінної розповсюджується на випадок *багатьох змінних*. Основні означення, які стосуються *функцій багатьох змінних*, є узагальненням відповідних означень для функцій однієї змінної.

Зупинимось докладніше на *функції двох змінних*.

Нехай задано множину D впорядкованих пар чисел (x, y) .

Означення. Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом поставлено у відповідність єдине число z , то на множині D визначено *функцію двох змінних* x, y і записують

$$z = f(x, y).$$

Приклад 1. Висота h пункту на земній поверхні (над рівнем моря) є функцією географічних координат – широти φ і довготи λ . Широта може змінюватися в межах від -90° до $+90^\circ$, довгота – від -180° до $+180^\circ$.

Приклад 2. Добуток множників x та y є функцією двох аргументів x і y . Значення аргументів x та y можуть бути довільними.

Множина пар (x, y) значень x та y , для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення цієї функції* і позначають $D(f)$ або D . *Множину значень функції* позначають $E(f)$ або E .

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел (x, y) відповідає в прямокутній системі координат Oxy єдина точка $M(x, y)$ площини, і, навпаки, кожній точці $M(x, y)$ площини відповідає єдина упорядкована

пара чисел (x, y) , то функцію $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, можна розглядати як функцію точки M і замість $z = f(x, y)$ писати $z = f(M)$.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають $z_0 = f(x_0, y_0)$ або $z_0 = f(M_0)$.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

□ Підкореневий вираз повинен задовольняти нерівність $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$, або $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$. Отже, бачимо, що область визначення задається точками, які розташовані на еліпсі з півосями 2 і 1 та всередині цього еліпса. ■

Функцію двох змінних можна зобразити *графічно* у вигляді деякої *поверхні* (рис. 1).

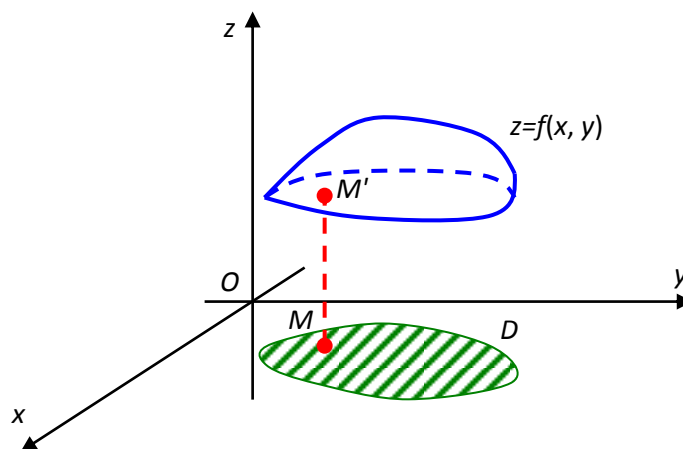


Рис. 1. Графік функції $z = f(x, y)$

Але побудова графіків функцій двох змінних часто пов'язана з труднощами. Тому для зображення функції двох змінних користуються відомим для поверхонь другого порядку методом паралельних перерізів. Суть методу полягає у перетині поверхні площинами $z = c$, де c — довільне число. При цьому одержимо криві $f(x, y) = c$, які називають *лініями рівня* (або *ізокривими*) функції.

Означення. *Графіком функції* $z = f(x, y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називають геометричне місце точок $M'(x, y, f(x, y))$ проекціями яких є точки $M(x, y)$, які належать області D на площині Oxy (рис.1).

Це геометричне місце точок утворює в тривимірному просторі R^3 певну поверхню, проекцією якої на площину Oxy є множина D .

2. Границя функції двох змінних.

Нехай $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$ — дві точки з області D . Позначимо

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} -$$

відстань між точками M та M_0 .

Означення. Околом точки M_0 називають круг, який містить цю точку.

Означення. δ -околом точки M_0 називають множину точок $M(x, y)$, координати яких задовольняють нерівність:

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Отже, δ -окіл точки M_0 – це всі внутрішні точки круга з центром в точці M_0 і радіусом δ .

Нехай $\{M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), \dots, M_n(x_n, y_n), \dots\}$ – *послідовність точок* з області D , яку позначимо $\{M_n\}$.

Означення. Послідовність точок є *збіжною до точки* $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий, що при $n > N$ виконується нерівність

$$\rho(M_n; M_0) < \varepsilon.$$

При цьому точку M_0 називають *границею послідовності* $\{M_n\}$ і записують це так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0.$$

Очевидно, якщо

$$\{M_n\} \rightarrow M_0,$$

то

$$(x_n) \rightarrow x_0, (y_n) \rightarrow y_0, n \rightarrow \infty,$$

де $(x_n), (y_n)$ – послідовності координат точок M_n .

Розглянемо *поняття границі функції двох змінних*. Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області D і точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ така, що в довільному її δ -околі є хоча б одна точка з області D , відмінна від M_0 .

Означення (мовою ε - δ). Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ в точці M_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M; M_0) < \delta$, виконується нерівність

$$|f(M) - A| < \varepsilon.$$

За допомогою логічних символів запис цього означення має вигляд:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall M(x, y) \in D : 0 < \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$$

Сформулюємо означення границі функції за допомогою послідовностей.

Означення (мовою послідовностей). Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ в точці M_0 , якщо для довільної збіжної до M_0 послідовності точок $\{M_1, M_2, \dots, M_n, \dots\}$ ($M_k \neq M_0, k \in N$) відповідна послідовність значень

функції $\{f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_n), \dots\}$ має границею число A .

Позначають *границю функції двох змінних* наступним чином

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A,$$

або

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Користуючись означенням границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної на функції двох змінних. Наприклад, правильне таке твердження.

Теорема. Нехай функції $f(M)$ та $g(M)$ визначені на одній і тій самій множині D і мають в точці M_0 границі B та C . Тоді функції

$$f(M) \pm g(M),$$

$$f(M) \cdot g(M),$$

та

$$\frac{f(M)}{g(M)} \text{ при } g(M) \neq 0$$

мають в цій точці границі, які відповідно дорівнюють

$$B \pm C, B \cdot C \text{ та } \frac{B}{C}, (C \neq 0).$$

Границю функції двох змінних, яка визначена на всій площині $\mathbf{R}^2$, можна шукати і в *околі нескінченності* (*нескінченно віддаленій точці площини*), який визначається таким чином, що координати x та y довільної точки $M(x, y)$ околу нескінченності задовольняють нерівності $|x| > K$ та $|y| > K$, де K – довільне число. У цьому випадку записують, що $x \rightarrow \infty$ та $y \rightarrow \infty$.

Приклад. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

□ Нехай $x \neq 0, y \neq 0$. Тоді

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x^2}{x^4 + y^4} + \frac{y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Оскільки

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = 0,$$

то за отриманою нерівністю можемо зробити висновок, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0. \blacksquare$$

3. Неперервність функції двох змінних.

Нехай функція двох змінних $z = f(M)$ визначена на множині D , точка $M_0 \in D$ і довільний δ -окіл точки M_0 містить точки множини D .

Означення. Функція $z = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0 , якщо

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Точки, в яких функція двох змінних неперервна називаються *точками неперервності*, а точки, в яких порушується неперервність – *точками розриву* цієї функції.

Приклад. Функція

$$z = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

в точці $O(0; 0)$ не визначена і тому розривна.

Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ та $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Величини Δx та Δy називаються *приростами аргументів*, а Δz – *повний приріст функції* $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) . З використанням цих позначень означення неперервності можна переписати у такому вигляді

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (f(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0,$$

тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

Або, функція є неперервною в точці M_0 , якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції.

Означення. Функція називається *неперервною на множині* D , якщо вона неперервна в кожній точці (x, y) цієї множини.

Приклад. Функція

$$z = x^2 + y^2$$

є неперервною на всій площині Oxy , оскільки у кожній точці площини (x_0, y_0) маємо

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) = \\ &= 2x_0\Delta x + 2y_0\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Використовуючи поняття неперервності функції двох змінних та відповідні теореми про границі можна довести, що арифметичні операції над неперервними функціями і побудова складеної функції з неперервних функцій приводять до неперервних функцій.

4. Частинні похідні та повний диференціал.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx , залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x, y)$ належала заданому околу.

Означення. Величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

називається *частинним приростом функції f по змінній x* .

Аналогічно

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

– *частинний приріст функції f по змінній y* .

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (1)$$

то вона називається *частинною похідною функції $f(x, y)$ по змінній x в точці M* і позначається одним із символів

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Аналогічно *частинна похідна функції $f(x, y)$ по змінній y* визначається як границя

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (2)$$

Якщо така границя існує, то вона позначається одним із символів

$$z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Частинні похідні можна розглядати у будь-якій точці області визначення функції, де існують границі (1) та (2). Але на практиці при знаходженні частинних похідних користуватися означенням складно. Тому, як і у випадку функції однієї змінної, використовують таблицю похідних елементарних функцій та правила диференціювання.

При знаходженні частинної похідної z'_x шукають звичайну похідну функції однієї змінної x , вважаючи змінну y сталою. При знаходженні z'_y сталою вважається змінна x .

Приклад. Знайти частинні похідні функції:

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

□ Знайдемо частинні похідні по кожній змінній:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y. \quad \blacksquare$$

Приклад. Знайти частинні похідні функції:

$$f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y^2}.$$

□ Знайдемо частинні похідні по кожній змінній:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y^2}\right)} \cdot \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{y^2}\right)} \cdot \frac{-2x}{y^3}. \quad \blacksquare$$

Геометричний зміст частинних похідних

Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня, а графіком функції $z = f(x, y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$ (рис. 2). Виходячи з геометричного змісту похідної функції однієї змінної, значення частинної похідної функції f по змінній x в точці (x_0, y_0) дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої $z = f(x, y_0)$ в точці $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до осі Ox (її кутовому коефіцієнту), тобто

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Аналогічно

$$f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta -$$

тангенс кута нахилу дотичної до кривої $z = f(x_0, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ до осі Oy (кутовий коефіцієнт).

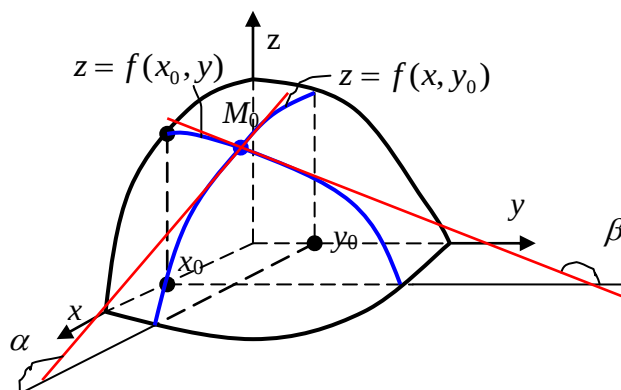


Рис. 2. Геометричний зміст частинних похідних

Частинні похідні вищих порядків

Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, то ці похідні можна розглядати як нові функції двох змінних x та y .

Означення. Якщо існує частинна похідна по змінній x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, тобто $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ то її називають *частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ по змінній x* і позначають одним із символів $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}'' .

Аналогічно, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ – *частинна похідна другого порядку по змінній y від функції $z = f(x, y)$* .

Якщо існує частинна похідна по змінній y від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають *мішаною частинною похідною другого порядку* і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f_{xy}'' .

Аналогічно частинну похідну по змінній x від функції $\frac{\partial f}{\partial y}$ називають *мішаною частинною похідною другого порядку* і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ або f_{yx}'' .

Отже, для функції двох змінних можна шукати чотири *частинні похідні другого порядку*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Мішані частинні похідні, взагалі, можуть бути різними. Відповідь на запитання, коли виконується рівність

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

дає така теорема.

Теорема (про мішані похідні). Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, причому похідні f''_{xy}, f''_{yx} неперервні в точці M_0 , то в цій точці виконується рівність

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку від функції

$$z = x^3 + \operatorname{tg} xy.$$

□ Спочатку знаходимо частинні похідні функції z

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{\cos^2 xy} \cdot y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 xy} \cdot x.$$

Далі, знаходимо *частинні похідні другого порядку*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + y \cdot (-2 \cos^{-3} xy \cdot (-\sin xy) \cdot y) = 6x + \frac{2y^2 \sin xy}{\cos^3 xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \cdot (-2 \cos^{-3} xy \cdot (-\sin xy) \cdot x) = \frac{2x^2 \sin xy}{\cos^3 xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\cos^2 xy} + y \cdot (-2 \cos^{-3} xy \cdot (-\sin xy) \cdot x) = \frac{1}{\cos^2 xy} + \frac{2xy \sin xy}{\cos^3 xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{\cos^2 xy} + x \cdot (-2 \cos^{-3} xy \cdot (-\sin xy) \cdot y) = \frac{1}{\cos^2 xy} + \frac{2xy \sin xy}{\cos^3 xy}. \quad \blacksquare$$

За аналогічним принципом можна знайти частинні похідні третього, четвертого та будь-яких вищих порядків.

Повний диференціал

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Виберемо прирости аргументів Δx і Δy так, щоб точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ належала цьому околу. Знайдемо *повний приріст функції* в точці $M(x, y)$ за формулою

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційовною в точці M* , якщо її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

де A, B – дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy , а

$$\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

та

$$\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0.$$

Для функції однієї змінної відомо, що коли вона диференційовна в деякій точці, то вона є неперервною в цій точці. Аналогічна властивість є справедливою для функції багатьох змінних.

Теорема 1. Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M , то вона неперервна в цій точці.

Теорема 2. Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці M , то вона має в цій точці похідні $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ і

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Зауваження. Твердження, обернене до **теорема 1**, є невірними. Це означає, що існують функції, неперервні в деякій точці, але не диференційовні в цій точці.

Теорема 3. Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M , то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці M .

Означення. Повним диференціалом dz диференційовної в точці M функції $z = f(x, y)$ називається лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту цієї функції в точці M , тобто

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3)$$

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z = x^2 \cdot e^{y^2}$.

□ Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x \cdot e^{y^2} ; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y . \end{aligned}$$

Підставимо їх у (4.3)

$$dz = 2xe^{y^2} dx + 2x^2 ye^{y^2} dy . \blacksquare$$

Використання повного диференціала для наближених обчислень.

Оскільки

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y , \end{aligned}$$

а

$$\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y) \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

та

$$\beta = \beta(\Delta x; \Delta y) \xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} 0 ,$$

то отримаємо **формулу для наближених обчислень значення функції двох**

змінних

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \quad (4)$$

Приклад. Наближено обчислити

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right).$$

□ Розглянемо функцію

$$z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right).$$

З умови одержуємо, що $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0,03$, $\Delta y = 0,02$.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точці $M(2; 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \bigg|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -1$$

Також обчислимо

$$z(2; 1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

За формулою (4) отримуємо наближене значення виразу:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) \approx \frac{\pi}{4} + 0,5 \cdot (-0,03) - 1 \cdot 0,02 \approx 3,11. \quad \blacksquare$$

Похідна складеної функції

Означення. Нехай $z=f(x, y)$ – функція двох змінних x та y , кожна з яких в свою чергу, є функцією незалежної змінної t

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Тоді функція $f(x(t), y(t))$ є *складеною функцією* змінної t .

Теорема. Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовні в точці t , а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційовна в точці t . Похідну цієї функції знаходять за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (5)$$

Приклад. Нехай $z = \sin x + 2xy^2$, а $x = 2t$, $y = t^2$.

Знайти $\frac{dz}{dt}$.

□ Знайдемо частинні похідні функції z :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + 2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4xy.$$

Оскільки

$$\frac{dx}{dt} = 2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t,$$

то за формулою (4.5) маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (\cos x + 2y^2)2 + 4xy \cdot 2t. \quad \blacksquare$$

? Контрольні запитання

1. Що називають функцією двох змінних?
2. Що називається областю визначення функції двох змінних і який її геометричний зміст?
3. Для чого використовується метод паралельних перерізів?
4. Що називають δ -околом точки $M_0(x_0, y_0)$?
5. Що називають границею функції $z = f(M)$ при $M \rightarrow M_0$?
6. Дайте означення неперервної функції двох змінних в точці і на множині точок.
7. Що називають частинними приростами функції $z = f(x, y)$ по змінних x та y ?
8. Що називають частинними похідними функції $z = f(x, y)$ по змінних x та y ?
9. Що є графіками функцій $z = f(x, y)$ та $z = f(x, y_0)$?
10. Сформулюйте геометричний зміст частинних похідних?
11. Що називають частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ по змінній x ?
12. Що називають частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ по змінній y ?
13. Що називають мішаними частинними похідними функції $z = f(x, y)$?
14. Скільки існує похідних другого порядку від функції двох змінних?
9. За яких умов $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$?
15. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?
16. Запишіть формулу для наближених обчислень.

17. Запишіть формулу для знаходження диференціала другого порядку функції двох змінних.
18. Сформулюйте теорему про похідну складеної функції двох змінних.