

Функції багатьох змінних.

План

1. Частинні похідні та повний диференціал.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

Частинні похідні та повний диференціал.

Приклад: Задана функція $z = 4x^2 - xy + y^2 - x + 2y + 5$. Знайти:

- а) частинні похідні z'_x, z'_y ;
- б) частинні похідні другого порядку $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$;
- в) диференціали dz, d^2z ;

Розв'язання.

а) Знайдемо частинну похідну від функції z по змінній x , вважаючи змінну y сталою: $z'_x = 8x - y - 1$.

Знайдемо частинну похідну від функції z по змінній y , вважаючи змінну x сталою: $z'_y = -x + 2y + 2$.

б) Частинні похідні другого порядку z''_{xx}, z''_{yy} шукаємо від похідних першого порядку z'_x, z'_y відповідно:

$$z''_{xx} = 8 \text{ (беручи похідну по змінній } x \text{ від } z'_x);$$

$$z''_{yy} = 2 \text{ (беручи похідну по змінній } y \text{ від } z'_y).$$

Мішану частинну похідну z''_{xy} знаходимо, взявши похідну від функції z'_y по змінній x : $z''_{xy} = -1$.

в) Диференціал першого порядку знаходимо за формулою

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Оскільки частинні похідні функції z по змінним x та y знайдено в пункті а), то

$$dz = (8x - y - 1)dx + (-x + 2y + 2)dy.$$

Диференціал другого порядку визначають за формулою

$$d^2z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2.$$

Частинні похідні другого порядку функції z знайдено в пункті б), то

$$d^2z = 8dx^2 - 2dxdy + 2dy^2.$$

Приклад. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції

$$z = e^{xy} + y \sin x$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + y \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + \sin x.$$

Потім знайдемо немішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - y \sin x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

Для мішаних похідних маємо

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (ye^{xy}) + \cos x = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad \text{і,} \quad \text{отже,}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x.$$

Приклад Знайти частинні похідні функції $z = f(x; y)$, яка задовольняє рівняння

$$xz + ytgz = xy + 1.$$

Розв'язання. Продиференціюємо цю рівність по x , вважаючи змінну z функцією від x і y . В результаті дістанемо рівняння

$$z + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial x} = y,$$

з якого маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(x + \frac{y}{\cos^2 z} \right) = y - z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y - z) \cos^2 z}{x \cos^2 z + y}.$$

Аналогічно знаходимо частинну похідну по y :

$$x \frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{tg} z + y \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cos^2 z - \sin z \cos z}{y + x \cos^2 z}.$$

Завдання на самопідготовку

1. Знайти частинні похідні першого та другого порядку по кожній незалежній змінній від функцій:

а) $z = x^2 y - x + y + 5.$

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

в) $z = \frac{y}{x}.$

2. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

б) $z = x^2 \ln y$