

Лекція 13

Застосування частинних похідних.

План

1. Скалярне поле. Похідна за напрямком. Градієнт.
2. Векторне поле. Дивергенція і ротор.
3. Екстремум функції двох змінних.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Скалярне поле

Означення. Частина простору R^3 , кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають *скалярним полем*.

Інакше кажучи, *скалярне поле* – це *скалярна функція трьох змінних* разом з її областю визначення.

Приклад. *Скалярним полем* є поле температури даного тіла, поле атмосферного тиску, поле вологості повітря, поле густини даного неоднорідного середовища тощо.

Для того, щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію $u(M)$ точки M і область визначення цієї функції.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається *стаціонарним*. Скалярне поле, яке змінюється з часом – *нестационарне*.

2. Похідна за напрямком

Для характеристики швидкості зміни поля у заданому напрямку введемо поняття *похідної за напрямком*.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в цьому полі точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (**рис. 1**).

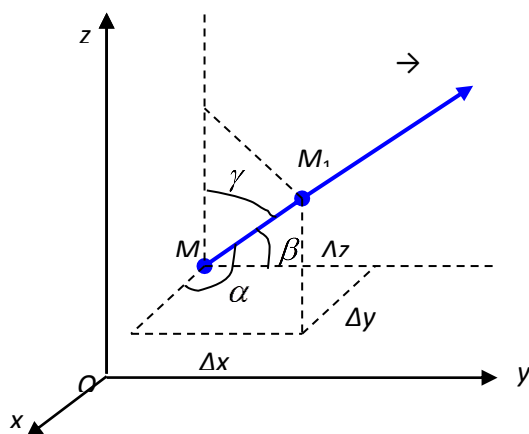


Рис. 1. Напрямні косинуси вектора

Нагадаємо, що напрямними косинусами називаються косинуси кутів α, β, γ , які утворює вектор $\vec{l}$ з осями координат. На векторі $\vec{l}$, на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тоді

$$\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Знайдемо приріст $\Delta_l u$ функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$. Такий приріст обчислюється за формулою

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Означення. Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$, коли $\Delta l \rightarrow 0$, то цю границю називають *похідною функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$* і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Нехай функція $u(x, y, z)$ диференційовна в точці M . Тоді її повний приріст можна записати таким чином

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – нескінченно малі функції при $\Delta l \rightarrow 0$.

Оскільки

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha,$$

$$\Delta y = \Delta l \cos \beta,$$

$$\Delta z = \Delta l \cos \gamma,$$

то

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma.$$

Перейшовши до границі при $\Delta l \rightarrow 0$, одержимо *формулу для обчислення похідної за напрямком*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1)$$

З формули (1) випливає, що частинні похідні є частковим випадком *похідної за напрямком*. Наприклад, взявши напрямок осі Ox , тобто $\vec{l}(1;0;0)$, одержимо напрямні косинуси $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$. Тоді з формули (1) отримаємо частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Подібно до того як частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$. При цьому абсолютна величина похідної $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$ відповідає значенню швидкості зміни функції u в напрямку $\vec{l}$, а знак похідної вказує на характер зміни (зростання, спадання).

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1; 2; -1)$ за напрямком від точки A до точки $B(2; 4; -3)$.

□ Запишемо координати вектора $\vec{l}$ і знайдемо його довжину та напрямні косинуси:

$$\vec{l} = (2-1; 4-2; -3+1) = (1; 2; -2), |\vec{l}| = 3,$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{l}_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{\vec{l}_y}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{\vec{l}_z}{|\vec{l}|} = -\frac{2}{3}.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left((2x - 2z) \cdot \frac{1}{3} + 2y \cdot \frac{2}{3} + 2x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \right) \Big|_{A(1,2,-1)} = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то задана функція в даному напрямку зростає. ■

3. Градієнт

Дамо відповідь на запитання, в якому напрямку похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення?

Означення. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u = u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $\text{grad } u$.

Отже,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (2)$$

Зв'язок між *градієнтом* і похідною в даній точці за довільним напрямком показує така теорема.

Теорема. Похідна функції $u = u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ в напрямку вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта в цій точці на вектор $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = np_{\vec{l}} \operatorname{grad} u.$$

Нехай $\vec{l}_0$ – одиничний вектор, однаконо напрямлений з вектором $\vec{l}$. Його координатами будуть напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, тобто

$$\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

а φ – кут між векторами $\vec{l}_0$ і $\operatorname{grad} u$ (рис. 2).

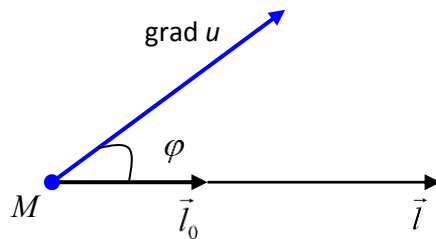


Рис. 2. Кут між вектором і градієнтом

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial l} = np_{\vec{l}} \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cos \varphi,$$

то з цієї рівності слідує, що $\frac{\partial u}{\partial l}$ має найбільше значення, якщо $\cos \varphi = 1$.

Отже, можна зробити такі висновки:

1. Похідна в даній точці за напрямком вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрямок вектора $\vec{l}$ збігається з напрямком градієнта, причому

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}.$$

2. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Інакше кажучи, швидкість зміни поля, у напрямку, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю.

Означення. *Поверхнею рівня* функції $u = u(x, y, z)$ називають множину точок $M(x, y, z) \in D(u)$, для яких задана функція набуває одного й того ж значення

$$u(x, y, z) = c.$$

Така поверхня ще називається *ізоповерхнею*.

3. Напрямний вектор нормалі до *поверхні рівня* $u = u(M)$, яка проходить через точку M_0 , має координати

$$\left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \right).$$

Таким чином, вектор-градієнт у кожній точці поля $u = u(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

4. Справедливими є рівності:

$$\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v,$$

$$\text{grad}(cu) = c \text{ grad } u,$$

$$\text{grad}(uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u,$$

$$\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}.$$

Приклад. Знайти кут φ між градієнтами поля $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 0)$.

□ Знайдемо частинні похідні та градієнт функції

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2z,$$

$$\text{grad } u = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} - 2z \cdot \vec{k}.$$

Тоді в точках A та B

$$\text{grad } u|_A = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k};$$

$$\text{grad } u|_B = 2 \cdot \vec{j};$$

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 6 \cdot 0}{\sqrt{4 + 16 + 36} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{14}}. \quad \blacksquare$$

2. Векторне поле. Дивергенція і ротор.

Якщо кожній точці M простору (або частини простору) поставлено у відповідність деякий вектор $U(M)$, то кажуть, що задано *векторне поле*.

Приклад. *Векторним полем* є поле тяжіння системи мас, поле густини струму, поле магнітної сили.

Будь-яке векторне поле $U(M)$, що збігається з полем градієнта скалярного поля $u(M)$, називають *потенціальним векторним полем*, а функцію $u(M)$ називають *потенціальною функцією*, або *потенціалом поля* $U(M)$.

Вектор поля $U(M)$ має *фізичний зміст* сили, а потенціальна функція $u(M)$ – фізичний зміст роботи.

Означення. Функцію вигляду

$$U(x, y, z) = u_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + u_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + u_z(x, y, z) \cdot \vec{k}, \quad (3)$$

де u_x , u_y , u_z – функції трьох змінних разом з її множиною визначення, називають *векторним полем*.

Означення.

Якщо $u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)$ є неперервно-диференційовні функції – складові векторного поля

$$U(x, y, z) = u_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + u_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + u_z(x, y, z) \cdot \vec{k},$$

то скаляр

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

називають *дивергенцією* поля U і позначають одним із символів $\operatorname{div} U$ або ∇U .

Таким чином, *дивергенцію* обчислюють за формулою

$$\operatorname{div} U = \nabla U = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4)$$

Нехай S – кусково-гладка поверхня, а $U(M)$ – довільне векторне поле, задане в деякій області V , що містить всі точки поверхні S . Якщо компоненти векторного поля $U(M)$ мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}$ в об'ємі V , то *дивергенція* має *фізичний зміст потоку векторного поля через замкнену поверхню S* .

Якщо символічно позначити ∇ вектор з координатами $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, то формулу (4.) можна розглядати як скалярний добуток вектора ∇ та векторного поля U .

Означення. Векторний добуток вектора ∇ та векторного поля U називається *ротором поля U*

$$\operatorname{rot} U = \nabla \times U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \quad (5)$$

В силу введених вище позначень *ротор* має *фізичний зміст циркуляції векторного поля по межі області*.

Приклад. Знайти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)$, якщо $r = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

□ Знайдемо градієнт скалярного поля r за формулою .

Знайдемо спочатку частинні похідні

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 2xyz + y^2z + yz^2, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = x^2z + 2xyz + xz^2, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = x^2y + xy^2 + 2xyz.$$

Тоді

$$\operatorname{grad} r = (2xyz + y^2z + yz^2)\vec{i} + (x^2z + 2xyz + xz^2)\vec{j} +$$

$$+ (x^2y + xy^2 + 2xyz)\vec{k}.$$

Знайдемо $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$ за формулою дивергенції (4.). Для цього спочатку знайдемо частинні похідні $\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}$. Маємо

$$u_x = 2xyz + y^2z + yz^2; \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 2yz;$$

$$u_y = x^2z + 2xyz + xz^2; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 2xz;$$

$$u_z = x^2y + xy^2 + 2xyz; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 2xy.$$

Таким чином,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = 2yz + 2xz + 2xy.$$

Ротор від градієнта поля r знаходимо за формулою (5). Маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} r) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz + y^2z + yz^2 & x^2z + 2xyz + xz^2 & x^2y + xy^2 + 2xyz \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2y + xy^2 + 2xyz)\vec{i} - \frac{\partial}{\partial z} (x^2z + xz^2 + 2xyz)\vec{i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (y^2z + yz^2 + 2xyz)\vec{j} - \frac{\partial}{\partial x} (x^2y + xy^2 + 2xyz) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (x^2z + xz^2 + 2xyz) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2z + yz^2 + 2xyz) = \\ &= (x^2 + 2xy + 2xz)\vec{i} - (x^2 + 2xz + 2xy)\vec{i} + \\ &+ (y^2 + 2zy + 2xy)\vec{j} - (2xy + y^2 + 2yz)\vec{j} + \\ &+ (2xz + z^2 + 2yz)\vec{k} - (2yz + z^2 + 2xz)\vec{k} = 0. \end{aligned}$$

3. Екстремум функції двох змінних

Локальний екстремум

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D , а $M_0(x_0, y_0)$ – точка з D .

Означення. Якщо існує окіл точки M_0 , який належить області D , і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають точкою *локального максимуму* (*локального мінімуму*) функції $f(x, y)$, а число $f(M_0)$ – *локальним максимумом* (*локальним мінімумом*) цієї функції.

Точки локального максимуму (рис. 3) та мінімуму (рис. 4) називають точками *локального екстремуму*.

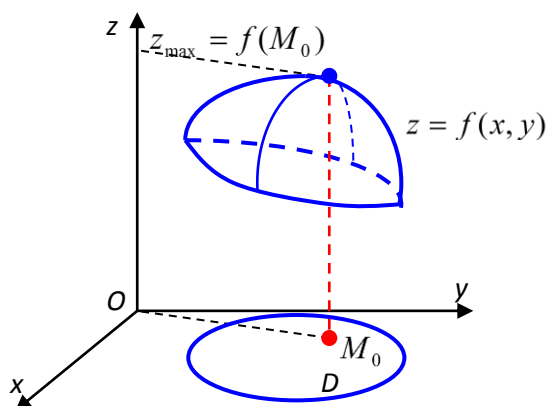


Рис. 3. Точка максимуму функції

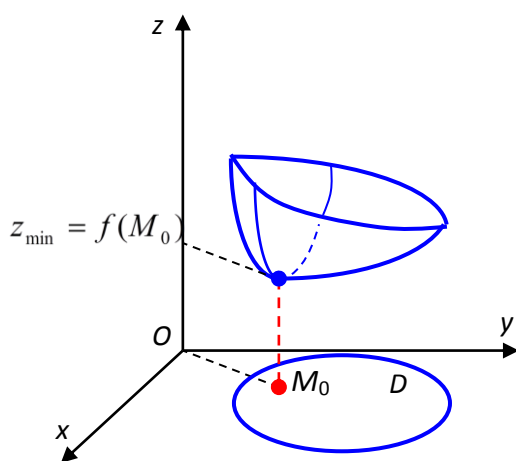


Рис. 4. Точка мінімуму функції

Теорема 1. (необхідні умови екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні дорівнюють нулю, або не існують.

□ Нехай (x_0, y_0) – точка локального екстремуму. Тоді функція $f(x, y_0)$ є функцією однієї змінної. Ця функція має екстремум у точці $x = x_0$, тому за теоремою про необхідну умову екстремуму функції однієї змінної її похідна $f'_x(x_0, y_0)$ дорівнює нулю або не існує. Аналогічно, розглянувши функцію $f(x_0, y)$, отримаємо, що $f'_y(x_0, y_0)$ також дорівнює нулю або не існує. ■

Означення. Точку (x_0, y_0) , в якій частинні похідні функції $f(x, y)$ дорівнюють нулю, називають *стаціонарною точкою*. Стаціонарні точки та точки, в яких похідна не існує, називають *критичними точками*.

Таким чином, якщо функція в точці досягає локального екстремуму,

то такою може бути лише *критична точка*. Проте не кожна критична точка є точкою локального екстремуму. Справедливою є така теорема.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ і деякому її околі функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Позначимо

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

а

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta > 0$, то в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $f(x, y)$ має локальний екстремум, а саме:

1. Локальний мінімум, якщо $A > 0$ ($C > 0$);
2. Локальний максимум, якщо $A < 0$ ($C < 0$).

Якщо $\Delta < 0$, то в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний екстремум відсутній.

Якщо $\Delta = 0$, то про характер стаціонарної точки нічого сказати не можна.

Доведення цієї теореми не наводимо.

На основі цих двох теорем сформулюємо *схему дослідження функції двох змінних на екстремум*.

1. Знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. У кожній стаціонарній точці обчислити визначник Δ і встановити характер стаціонарної точки.

3. Обчислити значення функції в стаціонарних точках.

Приклад. Дослідити функцію

$$z = 4x^2 - xy + y^2 - x + 2y + 5$$

на екстремум.

□ Знайдемо частинні похідні від функції $z = f(x, y)$:

$$z'_x = 8x - y - 1,$$

$$z'_y = -x + 2y + 2$$

та знайдемо стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{cases} 8x - y - 1 = 0; \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = -1. \end{cases}$$

Отже точка $(0; -1)$ – стаціонарна.

Щоб перевірити чи точка $(0; -1)$ є точкою екстремуму знайдемо частинні похідні функції $z = f(x, y)$ другого порядку z''_{xx} , z''_{yy} , z''_{xy} :

$$z''_{xx} = 8, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = -1.$$

Оскільки $\Delta(0; -1) = 8 \cdot 2 - (-1)^2 = 15 > 0$ та $f''_{xx}(0; -1) = 8 > 0$, то $(0; -1)$ – точка мінімуму функції $z = f(x, y)$. ■

Абсолютний екстремум

Відомо, що функція $z = f(x, y)$, задана і неперервна в замкненій обмеженій області D , досягає своїх найбільшого і найменшого значень в D . У внутрішніх точках області диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремуму. Але може статися так, що свого найбільшого (найменшого) значення функція досягає в точці, що знаходиться на межі області D . Тому додаткового дослідження вимагає поведінка функції на межі області.

Отже, щоб знайти найбільше і найменше значення функції в D (*абсолютний екстремум*), потрібно:

1. Знайти всі стаціонарні точки, які належать D без її межі, та обчислити значення функції в цих точках.

2. Дослідити функцію на екстремум на межі області D . Це дослідження зводиться до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної шляхом підстановки в функцію замість змінної y рівняння межі області.

3. Серед одержаних таким чином значень функції всередині та на межі області D вибираємо найбільше і найменше значення.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ у замкнутому крузі $x^2 + y^2 \leq 4$.

□ Знайдемо частинні похідні першого та другого порядку. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Знайдемо стаціонарні точки, прирівнявши частинні похідні до 0 та розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0. \end{cases}$$

Одержуємо точку $O(0; 0)$, яка є стаціонарною точкою.

Обчислимо в цій точці визначник Δ . Маємо $A = 2$, $B = 0$, $C = -2$. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то в точці O локальний екстремум не існує.

Дослідимо поведінку функції на межі заданого круга (на колі $x^2 + y^2 = 4$). З рівняння кола одержуємо $y^2 = 4 - x^2$. Підставивши цей вираз у функцію, отримуємо

$$z = 2x^2 - 4.$$

Дослідимо цю функцію однієї змінної на екстремум. Знайдемо похідну $z'(x) = 4x$. Прирівнявши отриману похідну до нуля і дослідивши її знак в отриманій точці, бачимо, що похідна при переході через цю точку змінює знак

з "-" на "+" (рис. 5).

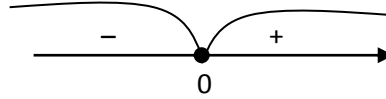


Рис. 5

Тому за достатньою умовою екстремуму функції однієї змінної точка $x = 0$ є точкою мінімуму функції $z = 2x^2 - 4$. Підставивши значення $x = 0$ в рівняння кола $y^2 = 4 - x^2$, отримуємо, відповідно, значення $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. Таким чином, маємо дві точки екстремуму на межі: $M_1(0; 2)$, $M_2(0; -2)$. Обчислимо значення функції в цих точках

$$z(M_1) = -4, z(M_2) = -4.$$

Аналогічно, виразивши з рівняння кола змінну x , одержуємо $x^2 = 4 - y^2$, яке після підстановки у функцію двох змінних перетворює її на функцію однієї змінної $z = 4 - 2y^2$, для якої $y = 0$ є максимумом. Отриманому значенню $y = 0$ відповідають $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Так отримуємо ще дві точки $N_1(2; 0)$, $N_2(-2; 0)$ і $z(N_1) = z(N_2) = 4$.

Отже, точки M_1, M_2 – точки мінімуму, а N_1, N_2 – максимуму функції. ■

? Контрольні запитання

1. Що називають точками локального максимуму (мінімуму) функції двох змінних?
2. Сформулюйте необхідні умови екстремуму.
3. Що називають стаціонарними точками?
4. Що називають критичними точками?
5. Сформулюйте достатні умови екстремуму.
6. Опишіть схему дослідження функції двох змінних на наявність локального екстремуму.
7. Яка відмінність між локальним та абсолютним екстремумами.
8. Як знайти абсолютний екстремум функції?
9. Що називають скалярним полем?
10. Запишіть формулу для знаходження похідної функції $u(x, y, z)$ за напрямком $\vec{l}$. Який її фізичний зміст?
11. Що називають градієнтом скалярного поля? Запишіть формулу для його обчислення.
12. Що називають векторним полем?
13. Що називають дивергенцією векторного поля?
14. Що називають ротором векторного поля?