

Застосування частинних похідних.

План

1. Похідна за напрямком.
2. Градієнт.
3. Екстремум функції двох змінних.

Література:

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Похідна за напрямком

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1)$$

Приклад.

1. Знайти похідну функції $z = 2x^2 - 3y^2$ у точці $P(1; 0)$ за напрямом, що складає з віссю Ox кут 120° .

┌ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P = 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P = 0.$$

$$\cos \alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{За формулою : } \frac{\partial z}{\partial e} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

Знак мінус вказує, що функція у точці P у даному напрямі спадає. ┘

2. Знайти похідну функції $u = xy + yz + zx$ у точці $M(2; 1; 3)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5; 5; 15)$.

┌ Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_M = 1 + 3 = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_M = 2 + 3 = 5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_M = 1 + 2 = 3.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{e} = \overrightarrow{MN}$: $\vec{e} = \{3; 4; 12\}$. Координати його орта $\vec{e}_0$:

$$|\vec{e}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9+16+144} = 13, \quad \vec{e}_0 = \left\{ \frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13} \right\}.$$

Напрямні косинуси $\cos \alpha = \frac{3}{13}, \cos \beta = \frac{4}{13}, \cos \gamma = \frac{12}{13}.$

За формулою $\frac{\partial u}{\partial e} = 4 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{4}{13} + 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{68}{13}.$ ┘



2. Градієнт

Означення. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u = u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають $\text{grad } u$.

Отже,

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (2)$$

Приклад. Знайти градієнт функції $z = x^2 y$ у точці $P(1; 1)$.

┐ Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_P = 1^2 = 1.$$

Отже, $\overrightarrow{\text{grad } z} = 2\vec{i} + \vec{j}.$ ┘

Приклад. Знайти $\overrightarrow{\text{grad } u}$ у точці $P(1; 2; 3)$, якщо $u = x y z$.

┐ Знаходимо частинні похідні та їх значення у даній точці:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 1 \cdot 3 = 3; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = 1 \cdot 2 = 2.$$

Отже, $\overrightarrow{\text{grad } u} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}.$

3. Екстремум функції двох змінних

Приклад. Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

┐ Знайдемо частинні похідні і складемо систему:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12, \quad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1; 2)$, $P_2(2; 1)$, $P_3(-1; -2)$, $P_4(-2; -1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

$$1) \quad \text{Точка } P_1: \quad A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{P_1} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{P_1} = 12, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{P_1} = 6;$$

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2 : $A=12$, $B=6$, $C=12$; $\Delta=144-36=108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x=2$, $y=1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Точки P_3 : $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$; $\Delta=36-144=-108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

Завдання на самопідготовку

1. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
2. Дослідити на екстремуми функцію $z = (x-1)^2 - 2y^2$.
3. Знайти $\overline{\text{grad}} z$ у точці $(2; 1)$, якщо $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
4. Знайти $\overline{\text{grad}} z$ у точці $(5; 3)$, якщо $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.
5. Знайти величину і напрям $\overline{\text{grad}} u$ у точці $(2; -2; 1)$, якщо $u = x^2 + y^2 + z^2$.