

Лекція 14

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ І ТРЬОХ ЗМІННИХ.

План

1. Подвійний інтеграл.
 - 1.1. Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості.
 - 1.2. Обчислення подвійного інтеграла.
2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
3. Застосування подвійних інтегралів до задач з геометрії.
4. Застосування подвійного інтеграла до задач з механіки.

Література

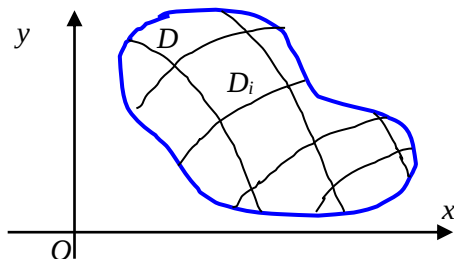
1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.
2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

1. Подвійний інтеграл.

1.1. Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R^2$. Вважатимемо, що межа області D складається із скінченного числа неперервних кривих, кожна з яких визначається функцією виду $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$.

Розіб'ємо область D на n частин D_i , які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i , $i = \overline{1, n}$.



У кожній області D_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і утворимо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta S_i, \quad (1)$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $z = f(x, y)$ по області D . Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i .

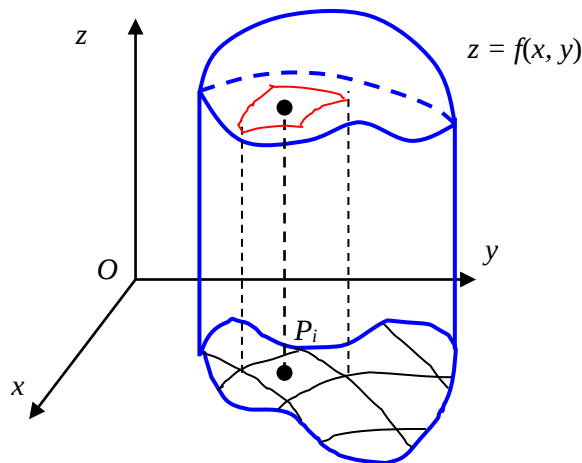
Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda \rightarrow 0$ має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_i , ні від вибору точок P_i в них, то ця границя називається *подвійним інтегралом* і позначається одним із таких символів:

$$\iint_D f(x, y) dS \quad \text{або} \quad \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Отже, за означенням

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (2)$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається *інтегровною в області D* , D – *областю інтегрування*, x, y – *змінними інтегрування*, dS (або $dx dy$) – *елементом площі*.



Геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла є такими:

А) Нехай маємо тіло, обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини Oxy , з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D , а твірні паралельні осі Oz . Таке тіло називається циліндричним. Тоді об'єм його знаходиться за такою формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Якщо у формулі (3) покласти $f(x, y) \equiv 1$, $(x, y) \in D$, то дістанемо формулу для обчислення площі S області D :

$$S = \iint_D dx dy. \quad (4)$$

Б) Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є область D . В області D задана неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y) \geq 0$, яка визначає густину пластини в точці (x, y) . Тоді маса пластини знаходиться за такою формулою

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (5)$$

Теорема (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то вона інтегрована в цій області.

Є ще й інші умови існування подвійного інтеграла, але надалі ми вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Порівнюючи означення подвійного інтеграла (2) та означення визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

бачимо, що конструктивно ці означення цілком аналогічні: в обох випадках розглядається деяка функція f , але в першому випадку це функція однієї змінної, визначена на одновимірній області – відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$, а в другому – це функція двох змінних, визначена у двовимірній області $D \subset \mathbb{R}^2$. В обох випадках область визначення розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Після цього знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області визначення. У випадку однієї змінної такою мірою була довжина Δx_i відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, а у випадку двох змінних – площа ΔS_i області $D_i \subset D$. Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області визначення прямує до нуля. Пізніше ми побачимо, що за цією самою схемою будується і потрійний інтеграл, тільки мірою області там є об'єм.

У зв'язку з цим, властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла. Сформулюємо ці властивості.

1. Сталій множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D C \cdot f(x, y) dx dy = C \cdot \iint_D f(x, y) dx dy, \quad C = \text{const}.$$

2. Подвійний інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Ця властивість має місце для суми довільного скінченного числа функцій.

3. Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ визначені в одній і тій самій області D і $f(x, y) \geq g(x, y)$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

5. (Адитивність подвійного інтеграла.) Якщо область інтегрування функції $f(x, y)$ розбити на області D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Ця властивість називається адитивністю подвійного інтеграла і справедлива для довільного скінченного числа областей, які складають область D і не мають спільних внутрішніх точок.

6. (Оцінка подвійного інтеграла.) Якщо функція неперервна в обмеженій замкненій області D , яка має площу S , то

$$m \cdot S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot S,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D .

7. (Середнє значення функції.) Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , яка має площу S , то в цій області існує така точка (x_0, y_0) , що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S.$$

Величину $f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \cdot \iint_D f(x, y) dx dy$ називають середнім значенням функції

$f(x, y)$ в області D .

1.2. Обчислення подвійного інтеграла.

Обчислення подвійного інтеграла за формулою (2) як границі інтегральної суми, так само як і у випадку визначеного інтеграла, пов'язане із значними труднощами. Щоб уникнути їх, обчислення подвійного інтеграла зводять до обчислення так званого повторного інтеграла – двох звичайних визначених інтегралів.

Покажемо, як це робиться. Припустимо, що при $(x, y) \in D$ функція $f(x, y) \geq 0$. Тоді, згідно з формулою (3), подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла з основою D , обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$. Обчислимо цей об'єм за допомогою методу паралельних перерізів:

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (6)$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox , а $x=a$ та $x=b$ – рівняння площин, які обмежують дане тіло. Перед тим, як обчислювати площу зробимо певні припущення відносно області D .

Припустимо спочатку, що область інтегрування D обмежена двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ і двома прямими $x = a$ та $x = b$, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всіх $x \in (a, b)$

Проведемо через точку $(x, 0)$, де $x \in (a, b)$, пряму, паралельну осі Oy . Ця пряма перетинає криві $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ в точках c_1 і c_2 , які називатимемо відповідно *точкою входу в область D* і *точкою виходу з області D* . Ординати цих точок позначимо відповідно $y_{вх} = \varphi_1(x)$ та $y_{вих} = \varphi_2(x)$.

Визначена таким чином область називається *правильною в напрямі осі Oy* . Інакше кажучи, область D називається правильною в напрямі осі Oy , якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oy , перетинає межу області не більше, ніж у двох точках.

Знайдемо тепер площу $S(x)$. Для цього проведемо через точку $(x, 0, 0)$ площину, перпендикулярну осі Ox

У перерізі цієї площини і циліндричного тіла утворюється трапеція $c_1 M_1 M_2 c_2$. Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії $M_1 M_2$ при фіксованому x є функцією лише y , причому y змінюється в межах від $y_{вх} = \varphi_1(x)$ до $y_{вих} = \varphi_2(x)$. Площа $S(x)$ трапеції $c_1 M_1 M_2 c_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Підставивши знайдене значення $S(x)$ у формулу (6) і враховуючи формулу (3), дістанемо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

або в зручнішій формі

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.} \quad (7)$$

Це і є шукана формула для обчислення подвійного інтеграла. Праву частину формули (7) називають *повторним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D* . У повторному інтегралі (7) інтегрування виконується спочатку по змінній y (при цьому x вважається сталою), а потім по змінній x . Інтеграл по змінній y називають *внутрішнім*, а по змінній x – *зовнішнім*. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла (в межах від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$) одержуємо певну функцію від однієї змінної x . Інтегруючи цю функцію в межах від a до b , тобто обчислюючи зовнішній інтеграл, дістаємо деяке число – значення подвійного інтеграла.

Зауваження 1. Наведені геометричні міркування при одержанні формули (7) можливі у випадку, коли $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$. Проте формула (7) залишається справедливою і в загальному випадку.

Зауваження 2. Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$ ($c < d$), причому $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ для всіх $y \in (c, d)$, тобто якщо область D правильна в напрямі осі Ox , то справедлива формула

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.} \quad (8)$$

Тут внутрішнім є інтеграл по змінній x . Обчислюючи його в межах від $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$ (при цьому y вважається сталою), дістанемо деяку функцію від однієї змінної y . Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d , дістанемо значення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. Якщо область D правильна в обох напрямках, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (7), так і за формулою (8). Результати матимемо однакові.

Зауваження 4. Якщо область D не є правильною ні в напрямі осі Ox , ні в напрямі осі Oy (тобто існують вертикальні і горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області, перетинають її межу більше, ніж у двох точках), то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі Ox чи Oy . Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних областях і додаючи результати (властивість адитивності), знаходимо шуканий подвійний інтеграл по області D .

Зауваження 5. Повторні інтеграли в правих частинах формули (7) і (8) називаються *інтегралами з різним порядком інтегрування*. Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно від формули (7) перейти до формули (8), або навпаки.

У кожному конкретному випадку, залежно від виду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 6. Правильну в напрямі осі Oy область D коротко позначатимемо так: $D = \{\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b\}$. Аналогічно $D = \{\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d\}$ – область правильна в напрямі осі Ox .

2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на деякій замкненій і обмеженій області D , тоді існує інтеграл
$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{9}$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та v . Вважатимемо, що з формул (9) однозначно можна визначити u та v :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{10}$$

Згідно з формулами (10), кожній точці $M(x, y) \in D$ вставиться у відповідність деяка точка $M^*(u, v)$ на координатній площині з прямокутними координатами u та v . Нехай множина всіх точок $M^*(u, v)$ утворює обмежену замкнену область D^* . Формули (9) називаються *формулами перетворення координат*, а формули (10) – *формулами оберненого перетворення*.

Теорема. Якщо перетворення (10) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (9) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (12)$$

Функціональний визначник (11) називається *визначником Якобі* або *якобіаном*.

Таким чином, виконуючи заміну змінних в інтегралі I за формулами (9), ми маємо елемент площі $dx dy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u, v)| du dv$ в координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^* .

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ за формулами $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Оскільки

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho, \quad |J(\rho, \varphi)| = \rho,$$

то формула (12) набуває вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (13)$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy , а D^* – відповідна їй область в полярній системі координат.

Зауваження 1. У багатьох випадках формулу (13) доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння границі області D містить суму $x^2 + y^2$, оскільки ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2.$$

Зауваження 2. Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β ($\alpha < \beta$) і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тому формулу (13) можна записати у вигляді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (14)$$

Зауваження 3. Якщо область D охоплює початок координат, тобто точка $O(0,0)$ є внутрішньою точкою області D , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho,$$

де $\rho(\varphi)$ – полярне рівняння межі області D .

3. Застосування подвійних інтегралів до задач з геометрії.

1. Площа плоскої фігури.

Якщо в площині Oxy задана фігура, що має форму обмеженої замкненої області D , то площа S цієї фігури знаходиться за формулою:

$$S = \iint_D dx dy.$$

2. Об'єм тіла.

Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy , а зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна та невід'ємна в області D , знаходиться за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

3. Площа поверхні.

Якщо поверхня σ , задана рівнянням проектується на площину Oxy в область D і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

4. Застосування подвійного інтеграла до задач з механіки.

1. Маса пластини.

Нехай на площині Oxy маємо матеріальну пластину, яка має форму обмеженої замкненої області D , в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$. Відомо, маса такої пластини визначається за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy.$$

2. Центр маси пластини. Статичні моменти.

Нехай матеріальна пластина в площині Oxy має форму області D ; густина пластини в точці $M(x, y)$ дорівнює $\gamma(x, y)$, де $\gamma(x, y)$ – неперервна функція в області D . Координати центра маси пластини визначаються формулами

$$x_C = \frac{\iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}, \quad y_C = \frac{\iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy}{\iint_D \gamma(x, y) dx dy}. \quad (15)$$

Величини

$$M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy, \quad M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy \quad (16)$$

називаються *статичними моментами пластини відносно осі Oy та Ox* .

Якщо пластина *однорідна*, тобто має сталу густину γ_0 , то в формулах у вище описаних формулах слід покласти $\gamma(x, y) = \gamma_0$.

3. Моменти інерції пластини.

Відомо, що момент інерції матеріальної точки відносно деякої осі дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані від цієї осі, а момент інерції системи матеріальних точок відносно однієї і тієї самої осі дорівнює сумі моментів інерції всіх точок системи.

Нехай матеріальна пластина має форму області D у площині Oxy , а неперервна функція $\gamma = \gamma(x, y)$ визначає густину в кожній точці цієї пластини. Тоді правильні наступні формули для обчислення моментів інерції розглядуваної пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \gamma(x, y) \, dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \cdot \gamma(x, y) \, dx dy. \quad (17)$$

Знайдемо момент інерції I_0 пластини відносно початку координат. Враховуючи, що момент інерції матеріальної точки (x, y) з масою m відносно початку координат дорівнює $m(x^2 + y^2)$, аналогічно дістаємо, що

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y) \, dx dy. \quad (18)$$

? Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу про об'єм циліндричного тіла.
2. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D ?
3. Сформулюйте достатню умову інтегровності функції.
4. Сформулюйте властивості подвійного інтеграла.
5. Яка область називається правильною в напрямку осі Oy ? Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області.
6. Запишіть формулу для обчислення подвійного інтеграла по області D у випадку, коли ця область правильна в напрямі осі Ox .
7. Сформулюйте теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.