

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ І ТРЬОХ ЗМІННИХ.

План

1. Подвійний інтеграл.

1.1. Поняття подвійного інтеграла. Умови його існування та властивості.

1.2. Обчислення подвійного інтеграла.

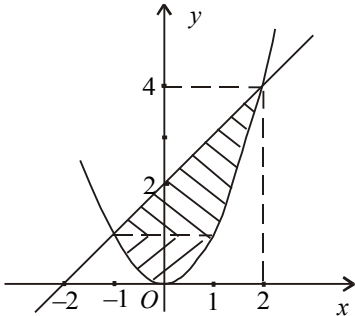
Література

1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.

Приклад. Обчислити $\iint_D (x^2 + y) ds$,
де $D = \{(x; y) \in R^2 \mid -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x+2\}$.



Область D правильна щодо осі Oy , тому:

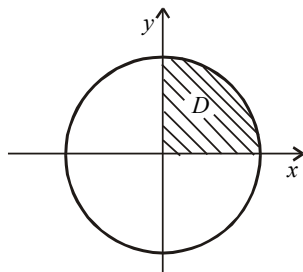
$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y) ds &= \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} (x^2 + y) dy = \int_{-1}^2 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x+2} dx = \\ &= \int_{-1}^2 \left(x^2(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 \right) \right) dx = \\ &= \int_{-1}^2 \left(-\frac{3}{2}x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 4 \right) dx = \\ &= \left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{x^4}{4} + \frac{5}{6}x^3 + x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= -0,3 \cdot 32 + 4 + \frac{20}{3} + 4 + 4 - \left(0,3 + \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + 1 - 2 \right) = 10,35.\end{aligned}$$

Ця сама область D неправильна щодо осі Ox , тому якщо змінити порядок інтегрування, то розглядуваний інтеграл можна звести до таких повторних інтегралів:

$$\iint_D (x^2 + y) ds = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx.$$

Приклад. Обчислити:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$



● Область інтегрування D зображено на рис. . Перейдемо в цьому інтегралі до полярних координат, тоді область D' визначатиметься такими нерівностями: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

З урахуванням формули маємо:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{D'} \sqrt{1-r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi = \iint_{D'} \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} d(1-r^2) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} (0-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Завдання на самопідготовку

Обчислити інтеграли. .

1. $\iint_D (x+y) ds, \quad D = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$

Відповідь. $(e-1)^2$.

2. $\iint_D \frac{x^2 ds}{1+y^2}, \quad D = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$

Відповідь. $\frac{\pi}{12}$.

3. $\iint_D \frac{ds}{(x+y+1)^2}, \quad D = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$

Відповідь. $\ln \frac{4}{3}$.

4. $\iint_D \frac{y ds}{(1+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad D = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$

Відповідь. $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

