

Лекція 17

Комплексні числа та дії над ними.

План

- Поняття про комплексні числа.
 - Алгебраїчна форма комплексного числа.
 - Тригонометрична форма комплексного числа.
 - Дії над комплексними числами заданими в алгебраїчній та тригонометричній формах.
 - Перша та друга формули Мавра.
 - Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Поняття про комплексні числа.

1.1. Алгебраїчна форма комплексного числа.

До цього моменту ми розв'язували різні рівняння в множині дійсних чисел. Справді, розв'язуючи квадратне рівняння, наприклад $x^2 + 2x + 3 = 0$ ми знаходимо спершу його дискримінант $D = -8$. Оскільки $D < 0$, то кажуть, що дане рівняння немає розв'язків, але тільки в множині дійсних чисел. Тепер навчимося розв'язувати такі рівняння, але в більш ширшій множині, яка називається *множиною комплексних чисел*.

Перша спроба введення уявних (комплексних) чисел поряд з дійсними числами належить швейцарському математику Аргану Ж.Р. У працях Коші О.Л. та Гауса К.Ф. була розвинута загальна теорія комплексних чисел.

Гаусс запропонував ввести поняття уявної одиниці, тобто $\sqrt{-1} = i$ або $i^2 = -1$ (в електротехніці уявну одиницю позначають літерою j). Таким чином, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$. Зрозуміло, що $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = i^{4n+1} \cdot i = -1$, $i^{4n+3} = i^{4n+2} \cdot i = -i$, $n \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$.

Означення. Вираз вигляду $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, i – уявна одиниця, називається *комплексним числом*.

Означення. Запис комплексного числа у вигляді $z = a + bi$ називається *алгебраїчною формою комплексного числа*.

Дійсну частину комплексного числа позначають так: $a = \operatorname{Re} z$;

Уявну частину комплексного числа позначають так: $b = \operatorname{Im} z$.

Наприклад, числа $2 - 3i$, $1 + 5i$, $7i$ – комплексні числа. Кожне дійсне число буде також комплексним, у якого уявна частина дорівнює 0, наприклад, $4 = 4 + 0i$. До комплексних чисел належить також і 0, який розглядається як число, у якого дійсна та уявна частини дорівнюють 0.

Властивості комплексних чисел:

1. *Комплексне число дорівнює нулю, якщо дійсна та уявна частини його дорівнюють нулю.*

Справді, $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = -bi \Leftrightarrow a^2 = -b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

2. *Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$ рівні між собою, тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їхні дійсні та уявні частини, тобто $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.*

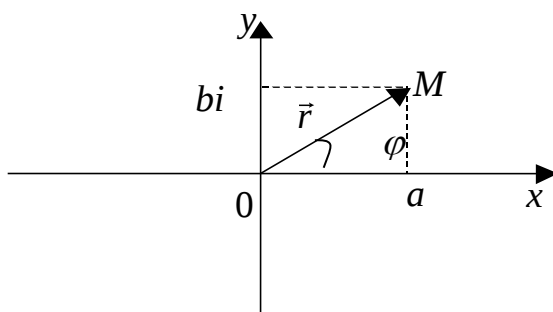
Справді, $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 - a_2 = (b_2 - b_1)i \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 = (b_2 - b_1)^2 i^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_2 - b_1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{matrix}.$$

1.2. Тригонометрична форма комплексного числа.

Демо геометричне тлумачення комплексного числа.

Якщо користуватись декартовою системою координат, то число $z = a + bi$ зображається точкою $M(a, b)$ таким чином:



на осі Ox відкладатимемо дійсну частину комплексного числа, а на осі Oy – уявну частину комплексного числа. Тоді вісь Ox називають *дійсною віссю*, а вісь Oy – *уявною віссю*. Отже, комплексне число $z = a + bi$ є парою двох упорядкованих дійсних чисел (a, b) . Вектор $\vec{r}$, який з'єднує точку O з точкою M називають *радіус-вектором комплексного числа z* .

Комплексне число $z = a + bi$ при $b = 0$ збігається з дійсним числом $z = a$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображаються точками осі Ox .

Означення. Комплексне число $z = a + bi$, в якому $a = 0$, називають *суто уявним*. Такі числа зображаються точками осі Oy .

Означення. Площину (x, y) , на якій зображаються комплексні числа, називають *комплексною площиною*.

Означення. Довжина вектора $|\vec{r}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ називають *модулем комплексного числа* і позначають $|z| = r$.

Означення. Кут φ , який лежить між віссю Ox та радіус-вектором $\vec{r}$ комплексного числа z , та відлічується від осі Ox проти напрямку стрілки годинника, називають *аргументом комплексного числа*.

Для будь-якого комплексного числа аргумент визначений з точністю до доданка, кратного 2π . Для $z = 0$ аргумент не визначений.

Означення. Значення аргументу $0 \leq \varphi < 2\pi$ називають *головним значенням аргументу комплексного числа z* і позначають $\arg z$.

Будь-яке значення аргументу φ комплексного числа z позначають

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Означення. Комплексне число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ називають *тригонометричною формою комплексного числа*.

Для переведення комплексного числа, заданого в алгебраїчній формі $z = a + bi$, у тригонометричну, необхідно знайти модуль і аргумент цього числа. Модуль визначається за формулою $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а головне значення аргументу – за формулою

$$\arg z = \varphi, \text{ де } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \end{cases} \text{ та } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Означення. *Комплексно спряженим* числом до числа $z = a + bi$ називається число $\bar{z} = a - bi$.

У комплексно спряжених чисел модулі рівні між собою, а аргументи протилежні: $|z| = |\bar{z}|$, $\arg z = -\arg \bar{z}$.

1.3. Дії над комплексними числами заданими в алгебраїчній та тригонометричній формах.

Над комплексними числами, як і над дійсними можна виконувати певні дії. Ми вивчатимемо додавання, віднімання, множення, ділення, а також піднесення до степеня та добування кореня. Розглянемо правила виконання дій над комплексними числами у алгебраїчній та тригонометричній формах.

Нехай ми маємо два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ в алгебраїчній формі. Тоді

$$1. \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$2. \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$\text{Для комплексно спряжених чисел} \quad z + \bar{z} = 2a;$$

$$z - \bar{z} = 2bi;$$

$$3. \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)i;$$

Для комплексно спряжених чисел $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$;

$$4. \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Ці формули можна, звичайно, запам'ятовувати, проте, краще вивести та у кожному конкретному прикладі проводити конкретні розрахунки. При виконанні арифметичних дій над комплексними числами можна користуватися правилами виконання дій над виразами зі змінною, вважаючи змінною уявну одиницю i . Тому легко довести формули додавання, віднімання та множення комплексних чисел. При множенні слід врахувати, що $i^2 = -1$. При діленні комплексних чисел чисельник і знаменник домножується на комплексне число, яке є комплексно спряжене до знаменника.

Проте, множення і ділення набагато зручніше виконувати для чисел в тригонометричній формі. Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$, то одержуємо

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Отже, при множенні двох комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, модулі перемножаються, а аргументи додаються.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}{r_2(\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

1.4. Перша та друга формули Муавра.

Перша формула Муавра – це формула піднесення до степеня комплексного числа, записаного у тригонометричній формі.

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

У тригонометричній формі зручно і добувати корінь з натуральним показником. Особливістю добування кореня n -го степеня є те, що комплексне число має n різних коренів $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$, які обчислюються за такою формулою:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = \overline{0, n-1}.$$

Таким чином, друга формула Муавра – це формула кореня n -го степеня з комплексного числа, записаного у тригонометричній формі.

Приклад. Нехай дано $z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Обчислити

$$z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, \sqrt[3]{z_2}.$$

Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{4}{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$z_1^3 = 4^3 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -64,$$

$$w_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k = \overline{0, 2}.$$

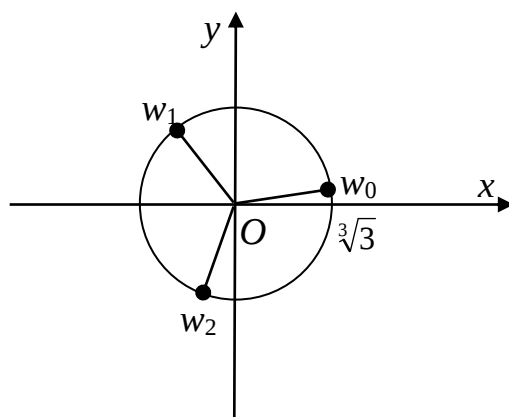
Таким чином, маємо три корені:

$$w_0 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}}{3} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

Кожен з наступних коренів може бути одержаний шляхом повороту попереднього кореня відносно початку координат на кут $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$.



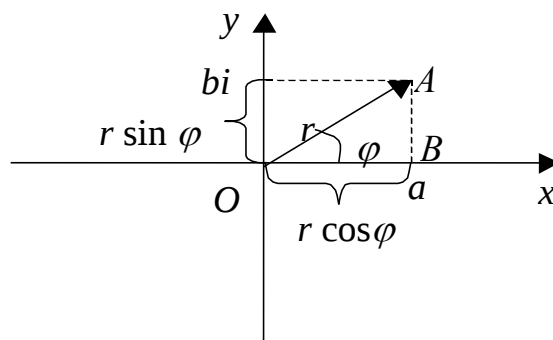
Операції додавання та віднімання доцільно виконувати тільки в алгебраїчній формі, а множення, ділення – як в алгебраїчній, так і в тригонометричній формах. Піднесення до степеня з натуральним показником та добування кореня з натуральним показником, як і множення і ділення найдоцільніше виконувати в тригонометричній формі. Добування кореня проводиться тільки в тригонометричній формі.

При виконанні арифметичних операцій необхідно, щоб комплексні числа були подані в одній з форм: алгебраїчній чи тригонометричній. А якщо числа подано в різних формах? Тоді потрібно перейти від однієї до іншої форми комплексного числа. Для цього існують формули переходу. Для того, щоб перейти від тригонометричної до алгебраїчної форми, необхідно в тригонометричній формі обчислити значення синуса, косинуса та розкрити дужки $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi$.

Тоді одержуємо формули переходу від тригонометричної до алгебраїчної форми комплексного числа

$$a = r \cdot \cos \varphi, \quad b = r \cdot \sin \varphi. \quad (1)$$

Для переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми для знаходження аргумента комплексного числа краще скористатися геометричним зображенням комплексного числа.



З трикутника OAB за співвідношеннями між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику зразу ж одержуються подані вище формули переходу від тригонометричної до алгебраїчної форми.

Навпаки, знаючи довжини катетів трикутника OAB , за теоремою Піфагора знаходимо модуль комплексного числа

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

Знаючи модуль комплексного числа та використовуючи формули (1), одержуємо співвідношення для визначення аргумента комплексного числа

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{r}, \\ \sin \varphi &= \frac{b}{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Означення. Співвідношення (2), (3) називаються *формулами переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа*.

Приклад. Перейти до алгебраїчної форми $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

За формулами переходу (1) маємо

$$a = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad b = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Тоді $z = \sqrt{3} + i$.

Приклад. Перейти до тригонометричної форми $z = 2 - 2i$.

За формулами (2) та (3) маємо

$$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \quad \cos \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Дане число запишеться в тригонометричній формі наступним чином

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right).$$

Використовуючи формули переходу, ми можемо подавати те саме комплексне число у алгебраїчній та тригонометричній формі.

Отже, *комплексні числа* – це розширення класу дійсних чисел, для яких введені арифметичні операції.

1.5. Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа.

Окрім розглянутих вище алгебраїчної та тригонометричної форм комплексних чисел існує ще одна – *показникова форма*. Далі розглянемо цю форму комплексного числа, введену Л. Ейлером, формулу Ейлера, а також застосування комплексних чисел в електротехніці та інших галузях.

Формула Ейлера встановлює взаємозв'язок між тригонометричними та показниковими функціями, якого не існувало для дійсних чисел

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (4)$$

З допомогою цієї формули комплексне число можна зображати в так званій показниковій формі, про яку йтиме мова нижче.

Розглянемо комплексне число в тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Використовуючи формулу Ейлера, одержуємо *показникову форму* комплексного числа

$$z = re^{i\varphi}.$$

Для запису числа в показниковій формі потрібно знати, як і у випадку тригонометричної форми, модуль та аргумент комплексного числа.

Дії над комплексними числами в показниковій формі виконуються згідно з правилами, введеними для тригонометричної форми, тобто для чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ мають місце залежності:

$$1. \ z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$2. \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Для піднесення до степеня числа $z = re^{i\varphi}$ використовують формулу

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Для знаходження коренів використовують формулу

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

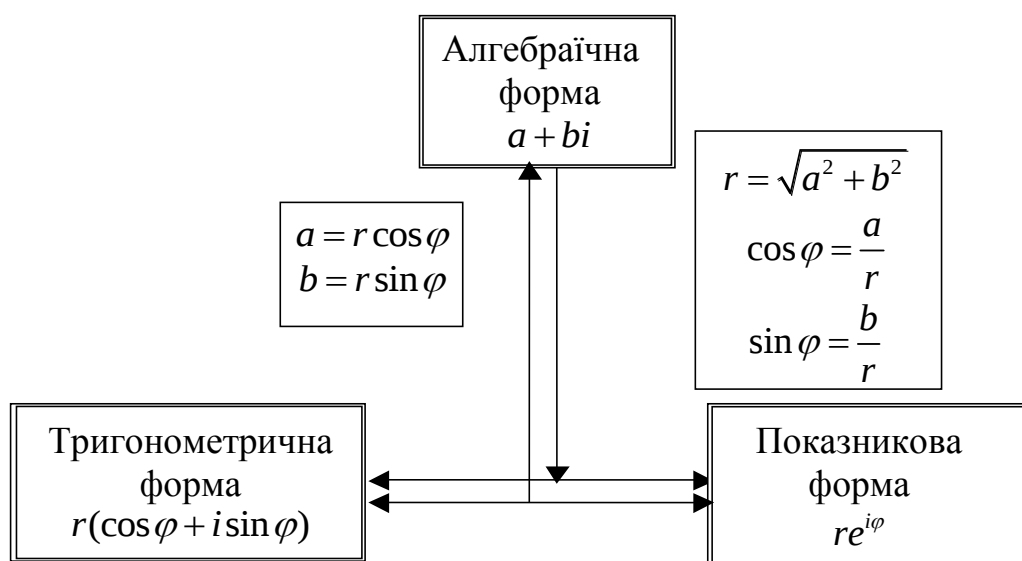
Приклад. Знайти добуток та частку чисел $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Одержуємо

$$z_1 z_2 = 6 \cdot 8 e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = 48 e^{i\frac{11\pi}{12}}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{8} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{4} e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Таким чином, дії над комплексними числами в показниковій формі виконуються за тими ж правилами, що і в тригонометричній формі.

Для запису комплексного числа в показниковій формі, як і в тригонометричній потрібно знати його модуль та аргумент. Тому не потрібно формул переходу з тригонометричної до показникової форми та навпаки. Формули, що дають змогу перейти від показникової до алгебраїчної форми та від алгебраїчної до показникової форми є ті самі, що й у випадку алгебраїчної та тригонометричної форм. При розв'язуванні прикладів з різними формами комплексних чисел можна використовувати наступну схему переходу від однієї до іншої форми комплексного числа



Приклад. Нехай $z = 5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$. Записати число в показниковій формі.

Маємо $r = 5$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Тоді $z = 5e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Приклад. Дано $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Записати число в показниковій формі.

Щоб перейти до показникової форми, треба скористатися формулами переходу від алгебраїчної до показникової форми (тими самими, що і до тригонометричної форми). За формулами переходу

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \cos \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ і тому $z = 4e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$.

Приклад. Дано $z = 8e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Записати число в алгебраїчній формі.

Щоб записати в алгебраїчній формі число $z = 8e^{i\frac{5\pi}{4}}$, можна скористатися формулами переходу від показникової (тригонометричної) до алгебраїчної форми (1), проте можна попередньо перейти до тригонометричної форми (нам відомі для цього модуль та аргумент), а потім, обчисливши значення синуса та косинуса і розкривши дужки, одержати алгебраїчну форму комплексного числа

$$z = 8e^{i\frac{5\pi}{4}} = 8\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i.$$

Приклад. Обчислити $(-2 + 2i)^{12}$.

Для піднесення до степеня попередньо перейдемо до показникової форми за формулами переходу.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$
$$\cos \varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аргумент $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ і, отже,

$$(-2 + 2i)^{12} = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{12} = (2\sqrt{2})^{12} e^{i\frac{3\pi}{4} \cdot 12} = 2^{18} e^{i9\pi} = 2^{18} (\cos 9\pi + i \sin 9\pi) = -2^{18}.$$

Зауваження. У наведеному прикладі ми скористалися періодичністю функції $z(\varphi) = e^{i\varphi}$, яка впливає з формули Ейлера. Маємо

$$e^{i(\varphi+2\pi k)} = \cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для дійсних чисел періодичність експоненти відсутня.

Приклад. Знайти $\sqrt[3]{8e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

Скористаємося формулою добування коренів для показникової форми.

Одержимо

$$\sqrt[3]{8e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3}}, \quad k = \overline{0, 2}.$$

Тоді

$$k=0, \quad w_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{18}},$$

$$k=1, \quad w_1 = 2e^{i\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{17\pi}{18}},$$

$$k=2, \quad w_2 = 2e^{i\frac{\frac{5\pi}{6} + 4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{29\pi}{18}}.$$

Отже, обчислення, які проводяться у показниковій формі за тими ж правилами, що і в тригонометричній, є простішими і зрозумілішими, оскільки базуються на застосуванні властивостей степенів.

? Контрольні запитання

1. Що таке уявна одиниця? Як вона позначається?
2. Що таке комплексне число?
3. У якому співвідношенні знаходиться множина комплексних чисел з множиною дійсних чисел?
4. Які форми запису комплексних чисел використовують і з якою метою?
5. Що таке модуль та аргумент комплексного числа?
6. Що таке дійсна та уявна частини комплексного числа?
7. Як зображуються комплексні числа на площині? Вкажіть два способи такого зображення.
8. Які дії над комплексними числами в алгебраїчній формі найдоцільніше виконувати?
9. Що таке комплексно спряжене число?
10. Як виконати ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі?
11. Для яких дій над комплексними числами найбільш придатна показникова форма?
12. Наведіть формулу Муавра. Для чого застосовують цю формулу?
13. У якій формі знаходять корінь n -го степеня з комплексного числа?
14. Запишіть формули переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа і навпаки. Як одержати ці формули?

15. Наведіть приклади застосування комплексних чисел.