

Комплексні числа та дії над ними.

План

- Поняття про комплексні числа.
 - Алгебраїчна форма комплексного числа.
 - Тригонометрична форма комплексного числа.
 - Дії над комплексними числами заданими в алгебраїчній та тригонометричній формах.
 - Перша та друга формули Мавра.
 - Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Тригонометрична форма комплексного числа.

Приклад.

Дано комплексне число $b = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$. Потрібно:

- 1) записати його в алгебраїчній та тригонометричній формах;
- 2) знайти всі корені рівняння $z^3 - b = 0$.

Розв’язання.

1) Запишемо задане число в алгебраїчній формі. Для цього помножимо чисельник та знаменник числа b на комплексно спряжене знаменника

$$b = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot i}{1-i^2} = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot i}{2} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i.$$

Отже, в алгебраїчній формі задане число буде мати вигляд

$$b = a + b \cdot i = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i.$$

Перейдемо до тригонометричної форми:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & b > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \pm \pi, & b < 0, \end{cases} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \pi + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Таким чином, задане число b в тригонометричній формі запишеться:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right).$$

2) Знайдемо всі корені рівняння $z^3 - b = 0$. Для цього скористаємося формулою

$$z_k = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

$$\begin{aligned} z^3 - b = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{b} &= \sqrt[3]{2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) = \text{Отже, задане} \\ &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi + 8\pi k}{12} + i \sin \frac{5\pi + 8\pi k}{12} \right), k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

рівняння буде мати наступні розв'язки

$$k = 0, \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right),$$

$$k = 1, \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right),$$

$$k = 2, \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} \right).$$

2. Перша та друга формули Муавра.

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Приклад. Нехай дано $z_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$. Обчислити

$$z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^3, \sqrt[3]{z_2}.$$

Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 12 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 12 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$z_1^3 = 4^3 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -64,$$

$$w_k = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = \overline{0, 2}.$$

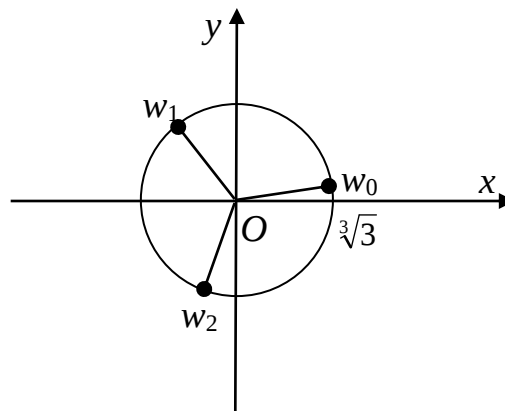
Таким чином, маємо три корені:

$$w_0 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}}{3} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

Кожен з наступних коренів може бути одержаний шляхом повороту попереднього кореня відносно початку координат на кут $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$.



3. Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа.

Приклад. Знайти добуток та частку чисел $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Одержуємо

$$z_1 z_2 = 6 \cdot 8 e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = 48 e^{i\frac{11\pi}{12}}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{8} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{4} e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Приклад. Нехай $z = 5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$. Записати число в показниковій формі.

Маємо $r = 5$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Тоді $z = 5e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Приклад. Дано $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Записати число в показниковій формі.

Щоб перейти до показникової форми, треба скористатися формулами переходу від алгебраїчної до показникової форми (тими самими, що і до тригонометричної форми). За формулами переходу

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \quad \cos \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ і тому $z = 4e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$.

Приклад. Дано $z = 8e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Записати число в алгебраїчній формі.

Щоб записати в алгебраїчній формі число $z = 8e^{i\frac{5\pi}{4}}$, можна скористатися формулами переходу від показникової (тригонометричної) до алгебраїчної форми

Ошибка! Источник ссылки не найден., проте можна попередньо перейти до тригонометричної форми (нам відомі для цього модуль та аргумент), а потім, обчисливши значення синуса та косинуса і розкривши дужки, одержати алгебраїчну форму комплексного числа

$$z = 8e^{i\frac{5\pi}{4}} = 8\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i.$$

Приклад. Обчислити $(-2 + 2i)^{12}$.

Для піднесення до степеня попередньо перейдемо до показникової форми за формулами переходу.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аргумент $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ і, отже,

$$(-2 + 2i)^{12} = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^{12} = (2\sqrt{2})^{12} e^{i\frac{3\pi}{4} \cdot 12} = 2^{18} e^{i9\pi} = 2^{18} (\cos 9\pi + i \sin 9\pi) = -2^{18}.$$

Зауваження. У наведеному прикладі ми скористалися періодичністю функції $z(\varphi) = e^{i\varphi}$, яка випливає з формули Ейлера. Маємо

$$e^{i(\varphi + 2\pi k)} = \cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для дійсних чисел періодичність експоненти відсутня.

Приклад. Знайти $\sqrt[3]{8e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

Скористаємося формулою добування коренів для показникової форми. Одержимо

$$\sqrt[3]{8e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt[3]{8} e^{i\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Тоді

$$k = 0, \quad w_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{18}},$$

$$k = 1, \quad w_1 = 2e^{i\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{17\pi}{18}},$$

$$k = 2, \quad w_2 = 2e^{i\frac{\frac{5\pi}{6} + 4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{29\pi}{18}}.$$

Завдання на самопідготовку

Дано комплексне число b . Потрібно:

- 1) записати його в алгебраїчній та тригонометричній формах;
- 2) знайти всі корені рівняння $z^3 - b = 0$.

$$1. \quad b = \frac{2\sqrt{2}}{1-i}.$$

$$5. \quad b = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}.$$

$$2. \quad b = \frac{1}{1-i\sqrt{3}}.$$

$$6. \quad b = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}.$$

$$3. \quad b = \frac{4}{-\sqrt{3}+i}.$$

$$7. \quad b = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}.$$

$$4. \quad b = \frac{-2\sqrt{2}}{1+i}.$$

$$8. \quad b = \frac{-4}{1-i\sqrt{3}}.$$