

Лекція 18

Диференціальні рівняння першого порядку.

План

1. Поняття диференціального рівняння.
2. Диференціальне рівняння 1 - го порядку. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь.
3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.
4. Однорідні диференціальні рівняння.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Поняття диференціального рівняння.

Спостерігаючи та досліджуючи різноманітні природні процеси та явища часто користуються математичними моделями, які описуються рівняннями, що містять похідні функцій. Це так звані *диференціальні рівняння*, які відкрив вчений Лейбніц.

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що зв'язує шукану функцію, її похідні чи диференціали і незалежну змінну.

Означення. Диференціальні рівняння, що містять функцію однієї змінної називаються *звичайними*, а якщо функцію багатьох змінних, то – *диференціальними рівняннями в частинних похідних*.

Означення. Найвищий порядок похідної (чи диференціалу) у диференціальному рівнянні називається *порядком* цього рівняння.

Якщо в алгебраїчних рівняннях невідома величина обов'язково присутня в записі рівняння, то в записі диференціального рівняння шукана функція, похідні нижчих порядків і незалежна змінна можуть бути відсутні, але похідна найвищого порядку (старша похідна) повинна бути обов'язково.

Наприклад, $y' = y^2 + \sin x$, $y' + y = 0$, $y' = 1$, $x dx - y dy = 0$ – диференціальні рівняння 1-го порядку, $y'' = 3$, $y'' - 4y' = 0$, $xy'' + y'^2 y = 1$ – диференціальні рівняння 2-го порядку.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння називається функція, що перетворює рівняння у тотожність при підстановці в диференціальне рівняння цієї функції та її похідних.

Процес відшукування розв'язків диференціального рівняння називається *інтегруванням* цього рівняння.

Наприклад,

а) функція $y = e^{-x}$ – розв'язок диференціального рівняння $y \cdot y' + e^{-2x} = 0$, оскільки підставивши її в це рівняння, одержуємо тотожність. Справді, $-e^{-x} \cdot e^{-x} + e^{-2x} \equiv 0$.

б) функція $y = 1 + 2\cos x$ – розв'язок диференціального рівняння $y''' + y' = 0$ (перевірити самостійно).

Теорія диференціальних рівнянь має велике наукове та практичне значення, бо багато задач геометрії, механіки, фізики зводяться до диференціальних рівнянь. Розглянемо задачу, що приводить до диференціальних рівнянь.

Задача про радіоактивний розпад. Дано деяка кількість x_0 радіоактивних речовин, період піврозпаду (час, за який розпадається половина речовини) – T років. Знайти залежність кількості речовини, що не розпалася в залежності від часу t .

Досліджено закон радіоактивного піврозпаду: кількість речовин, що розпадається за малий проміжок часу Δt наближено дорівнює кількості речовини, що ще не розпалася. Позначимо кількість речовин x в момент t , а кількість речовин, що розпалися за час Δt (від моменту t до моменту $t + \Delta t$ через проміжок $t + \Delta x$) через Δx , тому за законом піврозпаду маємо:

$$\Delta x = -kx\Delta t,$$

де k – постійний коефіцієнт пропорційності, а знак “–” говорить про те, що значення x спадає, а значення часу t зростає, тобто $\Delta t > 0$, $\Delta x < 0$.

Поділимо останню рівність на Δt та одержимо:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \text{ – елементарне диференціальне рівняння.}$$

2. Диференціальне рівняння 1 - го порядку. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь.

Означення. Диференціальним рівнянням 1-го порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

що зв'язує змінну x , функцію $y = y(x)$ та похідну y' .

Рівняння (1) не обов'язково може містити змінні x або y , але похідну y' – обов'язково.

Означення. Диференціальне рівняння, що неявно виражає похідну y' через змінні називається *неявним диференціальним рівнянням*. Це диференціальне рівняння вигляду (1).

Означення. Диференціальне рівняння, в якому похідна y' виражається через змінні x і y явно та записується у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

називається *рівнянням 1-го порядку в нормальній формі* або *диференціальним рівнянням, розв'язаним відносно похідної*.

Надалі розглядатимемо диференціальне рівняння вигляду (2), бо від рівняння виду (1) легко перейти до рівняння (2), виразивши похідну в (1) через змінні x і y .

Рівняння (2) перепишемо, врахувавши, що $y' = \frac{dy}{dx}$ (означення диференціалу)

наступним чином

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ або } -f(x, y)dx + dy = 0.$$

Помножимо останнє рівняння на деяку функцію $Q(x, y) \neq 0$ і одержимо

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

де $P(x, y) = -f(x, y)Q(x, y)$, тобто $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ – відомі функції. Рівняння (3) говорить, що змінні x та y є рівноправними, тому кожен з них можна розглядати як функцію іншої.

Прикладами диференціальних рівнянь виду (1), (2), (3) є $y'x + y^3 = 5$; $y' = 5x - y$; $(x + 4y)dx = 3x dy$.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння (2) на проміжку (a, b) називається диференційована на (a, b) функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці її в рівняння (2) перетворює його в правильну рівність, тобто

$$\forall x \in (a, b) : \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Наприклад, для диференціального рівняння: $y' - ux = 0$ функція $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ є розв'язком, бо $\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' - e^{\frac{x^2}{2}} x = 0$, але розв'язком рівняння $y' - ux = 0$ є також функція $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, C – стала.

Отже, при різних C маємо нескінченну множину розв'язків.

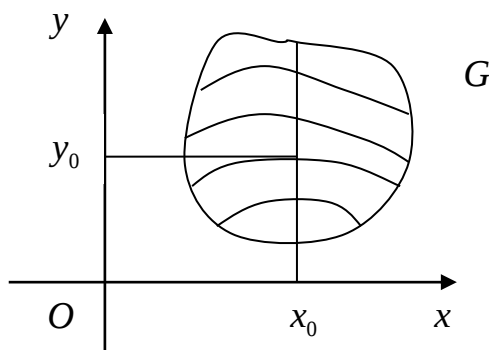
Означення. Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Дамо відповідь на питання, за яких умов рівняння (2) має єдиний розв'язок.

Теорема Коші. Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_x(x, y)$ визначені і неперервні в області $G \in Oxy$ і точка $(x_0, y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2), що задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \text{ або } \varphi(x_0) = y_0. \quad (4)$$

З точки зору геометрії, теорема Коші твердить, що через точку $(x_0, y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати x_0 , а y_0 – змінювати але тільки в області G , то одержимо різні інтегральні криві. Наочно це виглядає, що рівняння (2) має безліч розв'язків.



Означення. Умову (4) називають *початковою умовою* розв'язку диференціального рівняння (2) та записують ще таким чином

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (2), що задовольняє початкову умову (4) чи (5) називається *задачею Коші*. Геометрично це означає, що з множини інтегральних кривих виділимо ту, через яку проходить точка (x_0, y_0) .

Означення. Ці точки, в яких умови теореми Коші не виконуються (тобто $f(x, y)$ або $f'_x(x, y)$ – розривні) називаються *особливими*.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності називається *особливим розв'язком*.

Означення. Графік особливого розв'язку називається *особливою інтегральною кривою*.

Нехай права частина (2) задовольняє умови теореми Коші в області G .

Означення. Функція $y = \varphi(x, C)$, що залежить від аргументу x та довільної сталої C , називається *загальним розв'язком* (2) в G , якщо вона задовольняє умови:

- 1) Функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при довільному значенні сталої C з деякої множини.
- 2) Для довільної точки $(x_0, y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє умову $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Функція $y = \varphi(x, C_0)$ – *частинний розв'язок* рівняння (2).

Означення. Якщо загальний розв'язок диференційного рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння (1). А вираз $\Phi(x, y, C_0) = 0$ – *частинним інтегралом* рівняння (1).

3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.

Переходимо до розв'язування диференціальних рівнянь 1-го порядку. Якщо знайти всі розв'язки диференціального рівняння через скінченне число інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то говорять, що таке рівняння *інтегрується в квадратурах* (або *зводиться до квадратур*). Хоча не кожне

диференціальне рівняння має розв'язок, що виражається через елементарні функції. Є рівняння, які неможливо інтегрувати ні в елементарних розрахунках, ні в квадратурах. Тому розглядати будемо такі рівняння, для яких це можливо.

Означення. Рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y), \quad (6)$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Права частина (6) являє собою добуток двох функцій. Кожна функція є лише функцією однієї змінної.

Наприклад, рівняння $5xy^2 dy = yx dx$, $y' = 3x(y^2 + 1)^2$, $\sqrt{x^2 y^2 + y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^2$ – диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Щоб розв'язати рівняння (6), треба відокремити змінні. Врахувавши, що $y' = \frac{dy}{dx}$ та $\varphi(y) \neq 0$, поділимо обидві частини (6) на $\varphi(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y), \text{ звідси } \frac{dy}{\varphi(y) \cdot dx} = f(x).$$

А тепер помножимо останнє рівняння на dx

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x) dx. \quad (7)$$

Диференціальне рівняння (7) називається *рівнянням з відокремленими змінними*, бо в одній частині (7) є множник dy та функція $\varphi(y)$, що залежить тільки від змінної y та в другій частині є множник dx та функція $f(x)$, що залежить тільки від змінної x . Далі діємо наступним чином: інтегруємо обидві частини рівняння (7), врахувавши що диференціали dx та dy тотожно рівні, то і відповідні невизначені інтеграли відрізняються на сталу величину C

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Отож, рівняння (6) розв'язано в квадратурах.

Розглянуте рівняння (6) є частинним випадком рівняння

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y) dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y) dy = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) розв'язуємо аналогічно (6), тобто розділяємо змінні: в одній частині рівняння (8) залишаємо функції та диференціал від змінної x , а в другій частині – від змінної y . Перенесемо доданок $f_2(x) \cdot \varphi_2(y) dy$ в праву частину

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(y) dx = -f_2(x) \cdot \varphi_2(y) dy.$$

Поділимо на $\varphi_1(y)$, $f_2(x)$, при $\varphi_1(y) \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = -\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)} dy.$$

Інтегруємо і одержуємо загальний розв'язок. Враховуємо, що при діленні (6) на $\varphi(y)$ ми губимо розв'язки. Дійсно, $\varphi(y_0) = 0$, то стала $y = y_0$ є розв'язком (6), оскільки перетворює це рівняння в тотожність. Цей розв'язок може бути як частинним, так і особливим.

Розглянемо тепер рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \quad (9)$$

де a , b , c – числа.

Покажемо, що заміна

$$u = ax + by + c \quad (10)$$

зведе рівняння (9) до рівняння з відокремленими змінними. Продиференціюємо (10)

по змінній x : $u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}.$

Підставляємо заміну (10) в рівняння (9): $\frac{u' - a}{b} = f(u)$. Звідси $u' = a + bf(u)$.

При умові $a + bf(u) \neq 0$ маємо

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u) \Rightarrow \frac{du}{a + bf(u)} = dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, одержуємо загальний інтеграл, замінюючи u на $ax + by + c$. Якщо $a + bf(u) = 0$, то $\frac{du}{dx} = 0$. Тому згідно (10), рівняння (9) може мати розв'язки $ax + by + c = C$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $(x^2 + 1) dy + e^y dx = 0$.

Поділимо диференціальне рівняння на $e^y(x^2 + 1)$. Матимемо

$$\frac{dy}{e^y} + \frac{1}{1+x^2} dx = 0.$$

Інтегруючи ліву та праву частини останньої рівності, одержуємо загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння $-e^{-y} + \arctg x = C$.

4. Однорідні диференціальні рівняння.

Розглянемо інші диференціальні рівняння, що також можна звести до рівнянь з відокремлюваними змінними. Це так звані *однорідні диференціальні рівняння*.

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною* функцією n - го степеня відносно x та y , якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \quad (11)$$

Наприклад, 1) $f(x, y) = x^2 - 5xy$ – однорідна функція 2-го степеня, оскільки $f(tx, ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2(x^2 - 5xy) = t^2 f(x, y)$,

2) функція $f(x, y) = \frac{y - 5x}{\sqrt{xy}}$ – однорідна функція нульового степеня, оскільки:

$$f(tx, ty) = \frac{ty - 5tx}{\sqrt{(tx) \cdot (ty)}} = \frac{t(y - 5x)}{t\sqrt{xy}} = \frac{y - 5x}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x, y).$$

Розглянемо відповідні однорідні диференціальні рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x, y) \quad (12)$$

називається *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового степеня.

Очевидно, що рівняння

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (13)$$

є однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними функціями одного і того ж степеня.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$z = \frac{y}{x}, \quad (14)$$

де $z = z(x)$ – невідома функція.

Справді, припустимо, що (14) – розв’язок (12), тоді після диференціювання обох частин (14) по змінній x , матимемо

$$y' = z + xz',$$

звідси, підставляючи заміну (14) в (12), одержуємо:

$$z + xz' = f(x, zx). \quad (15)$$

Оскільки рівняння (15) є однорідним, то права частина цього рівняння має бути однорідною функцією нульового степеня, тобто задовольняти умову

$$f(x, zx) = f(tx, t \cdot zx). \quad \text{Покладемо} \quad t = \frac{1}{x}, \quad \text{тоді} \quad f(x, zx) = f(tx, t \cdot zx) = f(1, z).$$

Перепишемо (15)

$$z + xz' = f(1, z). \quad (16)$$

Рівняння (16) – це рівняння з відокремлюваними змінними. При умові, що $f(1, z) - z \neq 0$, відокремлюючи змінні z та x , одержимо

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо останнє рівняння

$$\int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \ln|x| + C, \quad C - const.$$

Враховуючи (14), одержуємо загальний розв’язок $x = C \cdot e^{\int \frac{dz}{f(1, z) - z}}$. $\Phi(x, y, c) = 0$ – загальний інтеграл (12).

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння $y^2 + 2x^2 y' = xy y'$.

Використовуючи те, що $y' = \frac{dy}{dx}$, матимемо

$$y^2 + 2x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$$

Домножимо обидві частини рівняння на dx

$$y^2 dx + 2x^2 dy = xy dy \Rightarrow y^2 dx + (2x^2 - xy)dy = 0.$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням типу (13). Тут функції $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = 2x^2 - xy$ мають степінь однорідності 2. Тоді поділимо обидві частини рівняння на x^2

$$\frac{y^2}{x^2} dx + (2 - \frac{y}{x}) dy = 0.$$

Зробимо заміну $z = \frac{y}{x}$, звідси $y = zx$, $dy = z dx + x dz$

$$z^2 dx + (2 - z)(z dx + x dz) = 0 \Rightarrow 2z dx + x(2 - z) dz = 0.$$

Відокремимо змінні, поділивши останнє рівняння на xz

$$2\frac{1}{x} dx + \frac{2-z}{z} dz = 0.$$

Проінтегрувавши ліву та праву частини та підставивши заміну $z = \frac{y}{x}$, одержуємо

загальний розв'язок диференціального рівняння $2\ln|x| + 2\ln|\frac{y}{x}| - \frac{y}{x} = C$. Зауважимо те,

що оскільки відбувалося ділення на xz , то $x=0$ та $y=0$ можливо будуть розв'язками вихідного диференціального рівняння. Підставивши у вихідне диференціальне рівняння $x=0$, $y=0$, матимемо тотожність тільки при $y=0$. Отже, $y=0$ – частинний розв'язок вихідного диференціального рівняння.

? Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Записати загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної.
3. Що називають розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
4. Сформулюйте теорему Коші.
5. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку?
6. Яке рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними?
7. Опишіть процес розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними.
8. Опишіть процес зведення рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$ до рівняння з відокремлюваними змінними.
9. Яка функція називається однорідною n -го виміру?
10. За яких умов диференціальне рівняння першого порядку є однорідним?
11. Опишіть алгоритм розв'язування однорідного диференціального рівняння.