

Диференціальні рівняння першого порядку.

План

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.
2. Однорідні диференціальні рівняння.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.

Означення. Рівняння виду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y),$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ – неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y' - y = 3.$$

Розв’язання: Перепишемо його у вигляді $\frac{dy}{dx} - y = 3$. Звідки

$$\int \frac{dy}{3+y} = \int dx, \quad x = \ln|3+y| + c.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$xy' - y = 1.$$

Розв’язання: Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{xdy}{dx} - y = 1, \quad xdy = (1+y)dx.$$

Звідки
$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Остаточно отримаємо $\ln|1+y| = \ln|x| + \ln c, \quad y = xc - 1.$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y - xy' = (1+x^2)y'.$$

Розв'язання: Це рівняння з відокремлюваними змінними

$$ydx - xdy = dx + x^2 dy, \quad (y-1)dx = (x^2 - x)dy.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \frac{dy}{y-1}.$$

Остаточно отримаємо $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln|c| = \ln|y-1|, \quad y = \frac{x-1}{x}c + 1.$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x+1)dy - (y-2)dx = 0.$$

Розв'язання: Це також рівняння з відокремлюваними змінними

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x+1}.$$

Остаточно маємо $\ln|y-2| = \ln|x+1| + c, \quad y = (x+1)c + 2.$

4. Однорідні диференціальні рівняння.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$z = \frac{y}{x},$$

де $z = z(x)$ – невідома функція.

$$y' = z + xz',$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

Розв'язання: Це однорідне диференціальне рівняння.

Вводимо заміну $y = zx, \quad y' = z'x + z.$

Після підстановки отримаємо рівняння $z'x = -1.$

Знайдемо його розв'язок $x dz = -dx, \quad dz = -\frac{dx}{x}, \quad z = -\ln|x| + c$

Зробимо зворотну підстановку $y = (-\ln|x| + c)x.$

Завдання на самопідготовку:

Знайти розв'язки диференціальних рівнянь

1. $xydx + (x+1)dy = 0$

2. $y' = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$

3. $x(x+2y)dx + (x^2-y^2)dy = 0$

4. $xy' = y + 2x - 2\sqrt{xy - y^2}$

5. $x dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0$

6. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$

7. $xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$

8. $x dy - (x+y)dx = 0$

9. $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

10. $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$