

Лекція 19

Диференціальні рівняння першого порядку.

План

1. Лінійні диференціальні рівняння I-го порядку та звідні до них.
2. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Лінійні диференціальні рівняння I-го порядку та звідні до них.

Продовжимо розгляд диференціальних рівнянь. Зупинимось на рівняннях 1-го порядку, а саме на лінійних диференціальних рівняннях.

Означення. Рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – функції, що є визначені, відомі, називається *лінійним* рівнянням (бо функція y , що входить у рівняння є в першому степені).

Наприклад, рівняння $5x y' + \frac{y}{\cos x} = 3x^2$, $y' + 10yx = (1 + x^2)^2$ – лінійними диференціальними рівняннями I-го порядку.

Означення. Якщо в **Ошибка! Источник ссылки не найден.** $Q(x) \equiv 0$, то таке рівняння набуває вигляду

$$y' + P(x)y = 0 \quad (2)$$

та називаються *лінійним однорідним рівнянням*. Якщо ж в **Ошибка! Источник ссылки не найден.** $Q(x) \neq 0$, то рівняння (1) називаються *лінійним неоднорідним рівнянням*.

Розглянемо два методи розв’язування рівняння (1)

I метод – метод варіації сталої (метод Лагранжа). Цей метод можна описати трьома кроками.

1 крок. Шукаємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (ЛОР), тобто рівняння (2)

$$y' + P(x)y = 0 \left(y' = \frac{dy}{dx} \right) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -P(x) dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x) dx, \\ \ln y &= -\int P(x) dx + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{-\int P(x) dx}, \end{aligned} \quad (3)$$

(3)– загальний розв'язок(2), де C – довільна стала.

2 крок. Методом варіації довільної сталої знаходимо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР). Він полягає у тому, що частковий розв'язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді (3), тобто як розв'язок однорідного рівняння, але при цьому визначимо сталу C , як функцію від x . Тобто цю заміну сталої C на функцію від незалежної змінної $\varphi(x)$ називають *варіацією*, звідки назва методу.

$$y_*(x) = \varphi(x)e^{-\int P(x) dx}. \quad (4)$$

Вираз (4) продиференціюємо по змінній x

$$y'_*(x) = \varphi'(x)e^{-\int P(x) dx} - e^{-\int P(x) dx} P(x) \cdot \varphi(x). \quad (5)$$

Підставимо (5) та (4) в (1)

$$\begin{aligned} \varphi'(x)e^{-\int P(x) dx} - e^{-\int P(x) dx} P(x) \cdot \varphi(x) + P(x) \cdot \varphi(x)e^{-\int P(x) dx} &= Q(x), \\ \varphi'(x)e^{-\int P(x) dx} &= Q(x). \end{aligned}$$

Останнє рівняння – це диференціальне рівняння для функції $\varphi(x)$, розв'яжемо його

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx}, \\ \varphi(x) &= \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C_1. \end{aligned}$$

Оскільки ми шукаємо частковий розв'язок ЛНР, то можна покласти $C_1 = 0$. Знайдену функцію $\varphi(x)$ підставляємо в (4)

$$y_*(x) = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx \right) \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

та одержуємо частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння(1).

3 крок. Записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1) як сума загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (2) та часткового розв'язку рівняння (1)

$$y(x) = Ce^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx. \quad (6)$$

Перший доданок – це загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (2). Другий доданок – частинним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння першого порядку складається із суми загального розв'язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

II метод – метод Бернуллі-Фур'є. Він полягає у тому, що шукану функцію знаходитимемо у вигляді добутку двох довільних функцій $u(x)$ та $v(x)$, тобто

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (7)$$

Оскільки обидві функції $u(x)$ та $v(x)$ залежать від змінної x , то при диференціюванні (7) використовуємо правило добутку. Отже,

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x). \quad (8)$$

Підставимо (7) та (8) у рівняння (1)

$$u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) + P(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = Q(x).$$

Згрупуємо доданки із спільним множником $u(x)$ та винесемо його за дужки

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x)[v'(x) + P(x) \cdot v(x)] = Q(x). \quad (9)$$

Оскільки функція $v(x)$ довільна, то виберемо її так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тобто

$$v'(x) + P(x) \cdot v(x) = 0.$$

З цього рівняння відокремлюючи змінні x та v , знаходимо функцію $v(x)$. Далі знайдено функцію $v(x)$ підставляємо у рівняння(9), тобто

$$u'(x) \cdot v(x) = Q(x).$$

Звідси, знову розділяючи змінні u та x одержимо функцію $u = u(x) + C$, $C = const$.

Тоді остаточно підставивши функції $u(x) + C$, $v(x)$ в

Ошибкa! Источник ссылки не найден., одержуємо

$$y(x) = (u(x) + C) \cdot v(x). \quad (10)$$

(10)– загальний розв’язок рівняння(1).

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Розв’яжемо дане диференціальне рівняння методом варіації сталої.

1 крок. Шукаємо загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{2}{x}dx = 0 \Rightarrow y_0 = x^2C,$$

де C – довільна стала.

2 крок. Шукаємо частковий розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ методом варіації сталої у вигляді $y_*(x) = \varphi(x) \cdot x^2$. Підставивши $y_*(x)$ у неоднорідне диференціальне рівняння (знайшовши перед цим похідну від $y_*(x)$), знаходимо невідому функцію $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) \cdot x^2 + 2x\varphi(x) - 2x\varphi(x) = 2x^3 \Rightarrow \varphi'(x) = 2x \Rightarrow \varphi(x) = x^2.$$

Підставляючи знайдену функцію $\varphi(x)$ у вираз $y_*(x)$, записуємо частковий розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y_*(x) = x^4$. Тоді загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння матиме вигляд $y(x) = x^2C + x^4$.

Розглянемо рівняння, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь.

Рівняння виду

$$y' = \frac{R(y)}{P(y) \cdot x + Q(y)}, \quad (11)$$

де $R(y)$, $Q(y)$, $P(y)$, $R(y) \neq 0$ – визначені функції, можна звести до лінійного, але при умові, що функцією вважатимемо x , а y – аргументом (незалежною змінною).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R(y)}{P(y) \cdot x + Q(y)} \quad (\text{оскільки } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'})$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(y) \cdot x + Q(y)}{R(y)} \Rightarrow x' = \frac{P(y)}{R(y)} \cdot x + \frac{Q(y)}{R(y)},$$

$$x' + \varphi(y) \cdot x = \psi(y), \quad (12)$$

$$\text{де } \varphi(y) = -\frac{P(y)}{R(y)}; \psi(y) = \frac{Q(y)}{R(y)}.$$

Рівняння (12) – лінійне диференціальне рівняння, але відносно функції $x(y)$ та аргументу y . Рівняння (12) можна розв'язувати як методом варіації сталої (врахувавши, що на другому кроці невідома функція $\varphi = \varphi(y)$), так і методом Бернуллі-Фур'є (зробивши заміну: $x = u(y) \cdot v(y)$).

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $(2e^y - x)y' = 1$.

Використовуючи те, що $y' = \frac{1}{x'}$, одержуємо рівняння $x' + x = 2e^y$, де $x = x(y)$, y – незалежна змінна.

Розв'яжемо останнє рівняння методом Бернуллі-Фур'є. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій $x(y) = u(y) \cdot v(y)$. Підставимо його у рівняння

$$u'(y) \cdot v(y) + u(y)[v'(y) + v(y)] = 2e^y.$$

Знайдемо функцію $v(y)$ з рівняння $v'(y) + v(y) = 0$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо $v(y) = C \cdot e^{-y}$. Беручи $C = 1$, матимемо $v(y) = e^{-y}$.

Підставимо функцію $v(y)$ у диференціальне рівняння для знаходження функції $u(y)$

$$u'(y) \cdot e^{-y} = 2e^y \Rightarrow u'(y) = 2e^{2y} \Rightarrow u(y) = e^{2y} + C.$$

Знайдені функції $u(y)$ та $v(y)$ підставляємо у вираз $x(y) = u(y) \cdot v(y)$ та записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$x(y) = e^{-y} \cdot (e^{2y} + C).$$

Означення. Рівняння виду

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \quad (13)$$

називається *рівнянням Бернуллі*.

Очевидно, що при $\alpha = 0$ рівняння (13) – це лінійне рівняння, а при $\alpha = 1$ – це рівняння з відокремлюваними змінними. За умови, що $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $y \neq 0$ поділимо (13) на y^α

$$y^{-\alpha} y' + P(x) \cdot y^{1-\alpha} = Q(x). \quad (14)$$

Введемо, заміну $y^{1-\alpha} = Z$. Тоді $(y^{1-\alpha})' = Z' \Rightarrow (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} y' = Z' \Rightarrow y^{-\alpha} y' = \frac{Z'}{1-\alpha}$.

Підставляємо в (14) та одержуємо

$$\frac{Z'}{1-\alpha} + P(x) \cdot Z = Q(x). \quad (15)$$

Останнє рівняння – це лінійне рівняння відносно нової змінної Z . Зауважимо, що при $\alpha > 0$ рівняння (13) має тривіальний розв'язок $y = 0$. Хоча на практиці необов'язково перетворювати рівняння Бернуллі до виду (15), а зразу ж інтегрувати методом Лагранжа (варіацій сталої) або методом Бернуллі, тобто як лінійне диференціальне рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння Бернуллі $y' + 2y = y^2 e^x$.

Розв'яжемо останнє рівняння методом Бернуллі-Фур'є. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Підставимо його у рівняння

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x)[v'(x) + 2v(x)] = v^2(x) \cdot u^2(x) \cdot e^x.$$

Знайдемо функцію $v(x)$ з рівняння $v'(x) + 2v(x) = 0$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержуємо $v(x) = C \cdot e^{-2x}$. Беручи $C = 1$, матимемо $v(x) = e^{-2x}$.

Підставимо функцію $v(x)$ у диференціальне рівняння для знаходження функції $u(x)$

$$u'(x) \cdot e^{-2x} = e^{-4x} \cdot u^2(x) \cdot e^x \Rightarrow u'(x) = e^{-x} \cdot u^2(x) \Rightarrow u(x) = \frac{1}{e^{-x} + C}.$$

Знайдені функції $u(x)$ та $v(x)$ підставляємо у вираз $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ та записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y(x) = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + C}.$$

Зауважимо, що $y = 0$ є частковим розв'язком вихідного рівняння.

2. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.

Означення. Рівняння вигляду

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (16)$$

ліва частина якого є повним диференціалом деякої функції двох змінних, тобто існує функція $F(x, y)$ така, що

$$dF = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (17)$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*.

З умови (17) випливає, що

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (18)$$

Рівняння (16) є рівнянням у повних диференціалах тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (19)$$

Розв'язком рівняння в повних диференціалах є загальний інтеграл виду $F(x, y) = C$, C – довільна стала.

З'ясуємо шлях відшукування загального інтегралу $F(x, y)$, що є функцією повного диференціалу.

Перевіряємо чи рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто чи виконується умова (19). Далі знаходимо функцію $F(x, y)$, використовуючи систему (18). Розглянемо одне з рівнянь системи (18), наприклад перше, яке проінтегруємо по змінній x і одержимо

$$F = \int P(x, y) dx + \varphi(y), \quad (20)$$

де функція $\varphi(y)$ – залежить лише від y . Щоб визначити $\varphi(y)$ підставляємо (20) в друге рівняння системи (18), для цього продиференціюємо по змінній y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y).$$

$$\text{Тоді } Q(x, y) = \int \frac{\partial P}{\partial y} dx + \phi'(y).$$

$$\text{Враховуючи умови, останнє рівняння перепишеться: } Q(x, y) = \int \frac{\partial Q}{\partial x} dy + \phi'(y).$$

Це диференціальне рівняння лише відносно змінної y . Проінтегрувавши його, ми знайдемо функцію $\phi(y)$. Далі знайдену функцію $\phi(y)$ підставляємо в (20) та записуємо загальний інтеграл рівняння: $F(x, y) = C$.

Аналізуючи вище сказане, зрозуміло, що інтегрування рівняння вигляду (16) не складає великих труднощів. Виникає питання: чи можна деякі рівняння зводити до рівнянь у повних диференціалах для покращення шляху знаходження розв'язку?

Означення. Інтегруючий множник $\mu(x, y)$ – це функція, яка після множення на неї диференціального рівняння, перетворює його в рівняння у повних диференціалах, тобто

$$P(x, y) \cdot \mu(x, y) dx + Q(x, y) \cdot \mu(x, y) dy = 0.$$

Останнє рівняння з інтегруючим множником – це рівняння у повних диференціалах.

Як знаходити інтегруючий множник. Загального методу немає, він знаходиться в окремих випадках. Згідно(18), маємо

$$\frac{\partial(P(x, y) \cdot \mu(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(Q(x, y) \cdot \mu(x, y))}{\partial x}.$$

Враховуючи правила диференціювання добутку двох функцій, маємо:

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

$$\text{Далі } P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad \frac{P}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{Q}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \text{ Звідси}$$

$$\frac{P \cdot \partial \ln \mu}{\partial y} - \frac{Q \cdot \partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (21)$$

З (21) треба знайти μ , а для того треба знайти частинний розв'язок (21). Але (21) – це диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції μ . В загальному, знайти μ з (21) складніше, ніж розв'язання самого рівняння (16). Але можна задачу відшукування μ спростити, якщо розглянути функцію μ або лише від x або лише від y .

Наприклад, нехай $\mu = \mu(y)$ – функція від змінної y .

Тоді $P \frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, або $\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$, тобто

$$d \ln \mu = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy. \quad (22)$$

Звідси знайдемо $\ln \mu$, а потім μ . Але це при умові, коли вираз $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ є функцією

лише від змінної y . Аналогічно, якщо вираз $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ залежить лише від змінної x ,

то $\ln \mu$ та потім μ знаходимо з рівняння

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right). \quad (23)$$

Отже, формули (22) та (23) дозволяють знаходити інтегруючий множник, але якщо він є функцією від y або x .

? Контрольні запитання

1. Яке диференціальне рівняння називається лінійним?
2. Опишіть метод Бернуллі-Фур'є розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.
3. Опишіть метод Лагранжа розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.
4. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі?
5. Опишіть процес зведення рівняння Бернуллі до лінійного диференціального рівняння.
6. Яке рівняння називається рівнянням в повних диференціалах?
7. Опишіть алгоритм розв'язування рівняння в повних диференціалах.
8. Чи може рівняння в повних диференціалах бути лінійним, і навпаки?

