

Диференціальні рівняння першого порядку.

1. Лінійні диференціальні рівняння I-го порядку.
2. Рівняння в повних диференціалах.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
1. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Лінійні диференціальні рівняння I-го порядку.

Приклад 1. Знайти частинний розв’язок лінійного диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє початкову умову

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2}, \quad y(0) = 4.$$

Розв’язання.

Шукаємо загальний розв’язок заданого рівняння методом Бернуллі, тобто у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + uv'.$$

Підставивши y та y' у вихідне рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} u'v + uv' + uv \cdot \operatorname{tg} x &= \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow u'v + u(v' + v \cdot \operatorname{tg} x) &= \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Знайдемо $v(x)$ з рівняння $v' + v \cdot \operatorname{tg} x = 0$:

$$\frac{dv}{dx} + v \cdot \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow dv = -v \cdot \operatorname{tg} x \, dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x \, dx.$$

Інтегруючи ліву і праву частини останньої рівності, матимемо

$$\ln v = \ln |\cos x| \Rightarrow v = \cos x.$$

Підставимо знайдене значення $v(x)$ у рівняння (1) і розв’язуємо його відносно $u(x)$:

$$\begin{aligned} u' \cos x &= \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x + e^2} \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x + e^2} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int du &= \int \frac{\cos x}{\sin x + e^2} dx + C \Rightarrow u(x) = \ln |\sin x + e^2| + C, \end{aligned}$$

де C – довільна стала.

Запишемо загальний розв’язок вихідного рівняння

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = (\ln |\sin x + e^2| + C) \cdot \cos x.$$

З початкової умови знаходимо сталу C :

$$y(0) = 4 \Rightarrow 4 = (\ln |\sin 0 + e^2| + C) \cdot \cos 0 \Rightarrow 4 = \ln e^2 + C \Rightarrow C = 2.$$

Отже, $y(x) = (\ln |\sin x + e^2| + 2) \cdot \cos x$ – шуканий частинний розв’язок заданого диференціального рівняння.

2. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.

Приклад . Розв’язати рівняння

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Розв’язок. Перевіримо, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

Обчислимо

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Таким чином існує функція $u(x, y)$, що $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x + 3x^2y$.

Проінтегруємо по X .

Отримаємо
$$u(x, y) = \int (2x + 3x^2y)dx + \Phi(y) = x^2 + x^3y + \Phi(y).$$

Для знаходження функції $\Phi(y)$ візьмемо похідну від $u(x, y)$ по y і прирівняємо до $x^3 - 3y^2$.

Отримаємо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^3 + \Phi'(y) = x^3 - 3y^2.$$

Звідси $\Phi'(y) = -3y^2$ і $\Phi(y) = -y^3$. Таким чином, $u(x, y) = x^2 + x^3y - y^3$ і загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $x^2 + x^3y - y^3 = C$.

Завдання на самопідготовку

1. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

2. $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}}, \quad y\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2}.$

3. $y' + 2\operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

$$4. \quad y' + \frac{3x^2}{x^3+1} \cdot y = (x^3+1)^{-1}, \quad y(0)=1.$$

$$5. \quad y' - \frac{2}{x}y = -\cos \frac{1}{x}, \quad y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}.$$

$$6. \quad 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0;$$

$$7. \quad (2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0;$$

$$8. \quad e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0;$$

$$9. \quad \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0;$$

$$10. \quad \frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0;$$