

Лекція 20

Диференціальні рівняння вищих порядків.

План

- 1. Основні поняття про диференціальні рівняння вищих порядків.**
- 2. Види диференціальних рівнянь вищих порядків та знаходження їх розв'язків.**
- 3. Диференціальні рівняння другого порядку зі змінними та сталими коефіцієнтами.**

Література

- 1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.**
- 2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.**
- 3. Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М., Костробій П.П., Кісілевич В.В., Ключник І.Ф., Колісник В.М., Кучмінська Л.Й., Нитребич З.М., Олексів І.Я., Стасюк М.Ф., Бобик І.О., Ватаманюк О.З., Качурін Б.Г. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – Л.: Видавництво Національного ун-ту “Львівська політехніка”, 2001.**
- 4. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Вища школа, 1994.**
- 5. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.**

У різних сферах діяльності людини виникає багато задач, розв'язування яких зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь. Припустимо відбувається деякий процес наприклад, фізичний, хімічний. Нас цікавить певна функціональна характеристика даного процесу, тобто залежність від часу, температури тіла, що охолоджується або кількості речовин, які утворюються в результаті хімічної реакції. Якщо повна інформація про хід цього процесу є достатньою, то можна спробувати побудувати його математичну модель. У багатьох випадках такою моделлю буде диференціальне рівняння, одним із розв'язків якого і є шукана функціональна залежність.

Розглянемо один приклад.

Нехай маємо одноповерхове приміщення, що має металеві колони і балки. Дах приміщення – залізобетонний, що опирається на цегляні стіни і залізобетонні збірні балки, які несуть основну кріпильну здатність покрівлі.

У зв'язку з цим ставиться така задача: *оцінити несучу здатність сталобетонної балки, закріпленої з обох сторін, в умовах пожежі.*

Для знаходження розв'язку цієї задачі складається система диференціальних рівнянь руху балки.

У процесі розв'язування цієї системи диференціальних рівнянь визначаються

- умови відсутності руйнування бетону відносно деформації стиску,
- умови збереження міцностних властивостей сталобетонної балки.

З цих досліджень визначаю орієнтований час вогнестійкості та збереження несучої здатності залізобетонних конструкцій даху приміщення при пожежі.

Часто при складанні диференціальних рівнянь використовують фізичний зміст похідної як швидкості перебігу процесу і другої похідної як швидкості зміни швидкості, тобто прискорення. Таким чином, існують диференціальні рівняння, які містять не тільки першу похідну від шуканої функції, але й похідні вищих порядків. Такі диференціальні рівняння називаються диференціальними рівняннями вищих порядків. Отже,

1. Основні поняття про диференціальні рівняння вищих порядків.

Розглянемо диференціальні рівняння, які містять похідні вищих порядків. Нагадаємо, що *порядком рівняння* називається порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у дане диференціальне рівняння.

Означення. Рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

називається *диференціальним рівнянням n -го порядку*, де x – незалежна змінна, $y = y(x)$ – шукана функція, F – функція, що зв'язує змінні x , y та похідні функції $y(x)$.

Рівняння (1) ще називають *неявним диференціальним рівнянням n -го порядку*.

Якщо в алгебраїчних рівняннях невідома величина обов'язково присутня в записі рівняння, то в записі диференціального рівняння n -го порядку функція y (шукана),

похідні нижчих порядків і незалежна змінна x можуть бути відсутні, але похідна n -го порядку (старша похідна) повинна бути обов'язково.

Означення. Рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

називається *диференціальним рівнянням, розв'язаним явно відносно n -ої похідної (нормальним диференціальним рівнянням n -го порядку)*.

Приклади диференціальних рівнянь вищих порядків:

$$y^{(5)} = \cos x, \quad y''' 3x = y^2, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 7x.$$

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (2) на деякому інтервалі (a, b) називається n разів неперервно диференційовна на цьому інтервалі функція $\varphi(x)$, яка після підстановки її у рівняння **Ошибка! Источник ссылки не найден.** перетворює його в тотожність по $x \in (a, b)$, тобто

$$\forall x \in (a, b): \varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Означення. Графік розв'язку диференціального рівняння (1) або (2) називається його *інтегральною кривою*.

Розглянемо задачу Коші або задачу з початковими умовами для диференціальних рівнянь вищих порядків.

Означення. Умови

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

називаються *початковими умовами* рівнянь (1) або (2). Скажімо, для диференціального рівняння 2-го порядку $y'' = f(x, y, y')$ матимемо наступні початкові умови:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0' \quad (4)$$

Початкові умови можна записати в дещо іншому вигляді:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

або

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Сформулюємо задачу Коші для рівняння(1): серед усіх розв'язків рівняння (1) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, який при $x = x_0 \in (a, b)$ задовольняє початкові умови(3).

Існування та єдиність розв'язку задачі Коші визначаються такою теоремою Коші.

Теорема Коші (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Якщо функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ і її частинні похідні по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ неперервні в деякій відкритій області $G \subset R^{n+1}$, то для довільної точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння(1), що задовольняє початкові умови(3).

Проводячи аналогію із диференціальним рівнянням 1-го порядку наведемо означення загального та частинного розв'язків рівняння (1).

Означення. Функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

називається загальним розв'язком рівняння, якщо вона володіє такими властивостями:

а) вона є розв'язком цього рівняння для довільних значень сталих $\tilde{N}_1, C_2, \dots, C_n$ з деякої множини простору R^n ;

б) для довільної точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ з деякої множини простору R^{n+1} існують такі значення сталих $\tilde{N}_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ для яких розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ задовольняє початкові умови

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0), y_0' = \varphi'(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0), \dots, y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1^0, \dots, C_n^0).$$

Означення. Загальний розв'язок рівняння

Ошибка! Источник ссылки не найден., записаний в неявному вигляді

$$\hat{O}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad (5)$$

називається загальним інтегралом рівняння(1).

Частинний розв'язок (або частинний інтеграл) знаходиться із загального, якщо у цих рівностях кожній довільній сталій $C_1, C_2, \dots, C_n$ надати конкретного числового значення.

Підсумуємо сказане: щоб розв'язати диференціальне рівняння n -го порядку потрібно:

1) знайти його загальний розв'язок (чи загальний інтеграл);

2) із загального розв'язку (загального інтегралу) виділити частинний розв'язок (чи частинний інтеграл), який задовольняє початкові умови (3), якщо такі умови задано.

2. Види диференціальних рівнянь вищих порядків та знаходження їх розв'язків.

Якщо задачу про знаходження всіх розв'язків диференціального рівняння вдається звести до обчислення скінченного числа інтегралів і похідних від відомих функцій і алгебраїчних операцій, то кажуть, що *диференціальне рівняння інтегрується в квадратурах (або зводиться до квадратур)*. Зрозуміло, що диференціальне рівняння n -го порядку інтегруватися в квадратурах буде не завжди, за винятком лише деяких класів диференціальних рівнянь. Наведемо класи таких рівнянь.

I) Розглянемо рівняння виду:

$$y^{(n)} = f(x), \quad (6)$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція, яка інтегрується в квадратурах.

Запишемо (6) у вигляді:

$$\frac{d(y^{(n-1)})}{dx} = f(x) \Rightarrow d(y^{(n-1)}) = f(x)dx.$$

Інтегруючи останню рівність, одержуємо $y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$, де C_1 – стала інтегрування. Далі знайдемо

$$\frac{d(y^{(n-2)})}{dx} = \left(\int f(x) dx + C_1 \right) \Rightarrow d(y^{(n-2)}) = \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx.$$

Звідки $y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2$, де C_2 – стала інтегрування.

Після n - го кроку інтегрування, одержуємо:

$$y = \int \left(\dots \int \left(\int f(x) dx \right) dx \dots \right) dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^n + \dots + C_n, \quad (7)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – сталі інтегрування; (7)– загальний розв'язок рівняння (6).

II) Розглянемо рівняння виду

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) записане в неявній формі і звести його до вигляду (6) не можемо. Нехай рівняння (8) можна розв'язати відносно змінної x :

$$x = f(y^{(n)}). \quad (9)$$

Після заміни $z = y^{(n)}$ рівняння (9) набере вигляду $x = f(z)$, звідки $dx = f'(z) dz$. Відомо, що $d(y^{(n-1)}) = y^{(n)} dx$, тому маємо:

$$d(y^{(n-1)}) = z \cdot f'(z) dz \Rightarrow y^{(n-1)} = \int z \cdot f'(z) dz + C_1. \quad (10)$$

Інтегруючи рівняння (10) тим самим методом, що й рівняння (6) і враховуючи щоразу, що $dx = f'(z) dz$, дістанемо розв'язок рівняння (8) в параметричній формі.

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків є *метод пониження порядку*. Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння зводиться до рівняння нижчого порядку. Розглянемо два типи диференціальних рівнянь, які допускають пониження порядку:

I) Нехай задано диференціальне рівняння, яке не містить явно шуканої функції, тобто

$$F(x, y' y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (11)$$

Порядок такого рівняння можна понизити за допомогою заміни $y' = z$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція, яка залежить від змінної x . Тоді

$$y'' = z', \quad y''' = z'', \quad \dots, \quad y^{(n)} = z^{(n-1)}. \quad (12)$$

Порядок диференціального рівняння (11) після проведення цієї заміни понизиться на одиницю, тобто рівняння (11) набуде вигляду

$$F(x, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Після цього понижуючи знову порядок отриманого рівняння подібним чином, ми прийдемо до рівняння $n-2$ - го порядку. Проводячи далі подібні міркування $n-3$ - разів ми отримаємо рівняння 1-го порядку.

II) Нехай задано диференціальне рівняння, яке не містить явно незалежної змінної x , тобто

$$F(y, y' y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (13)$$

Порядок такого рівняння можна понизити за допомогою заміни $y' = p$, де $p = p(y)$ – нова невідома функція, яка залежить від функції y . Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p_y' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p_y' \cdot p) = \frac{d}{dy}(p_y' \cdot p) \cdot \frac{dy}{dx} = (p'' p + (p')^2) p.$$

Як видно, порядок усіх знайдених похідних понижується на одиницю. Таким чином, від рівняння (13) n - го порядку приходимо до рівняння

$$F(y, p, p' p'', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

$n-1$ - го порядку

3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку.

Розглянемо клас диференціальних рівнянь другого порядку.

Означення. Рівняння виду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1)$$

або

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (2)$$

називаються рівняннями другого порядку у випадку (1) – однорідним, у випадку (2) – неоднорідним, де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на (a, b) .

Для початку розглянемо рівняння (1). Функція $y = 0$ є для нього розв'язком, який називається тривіальним або нульовим. Знайдемо нетривіальні розв'язки (1).

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (1), то функція

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (3)$$

є також розв'язком (1), де C_1 , C_2 – довільні сталі.

Виникає питання: чи може функція (3) бути загальним розв'язком рівняння (1).

Введемо поняття лінійної залежності та незалежності функцій.

Означення. Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на проміжку (a, b) , якщо тотожність

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad (4)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta = 0$, де α , β – дійсні числа.

Означення. Якщо (4) виконується, коли хоча б одне з чисел α , β не дорівнює нулю, то функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються лінійно залежними.

Очевидно, що функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними на (a,b) тоді і тільки тоді, якщо існує число γ , що для всіх $x \in (a,b)$ виконується

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \gamma, \quad y_1(x) = \gamma \cdot y_2(x),$$

тобто функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ пропорційні.

Приклад. Вияснити, які з функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ та $y_3(x)$ є лінійно залежні, а які лінійно незалежні, якщо $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = 3x^2$, $y_3(x) = x$.

Розв'язування. Розглянемо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{3}$, $\frac{y_1(x)}{y_3(x)} = x$, $\frac{y_3(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{3x}$.

Звідси негайно маємо, що $y_1(x)$, $y_2(x)$ – лінійно залежні, $y_1(x)$, $y_3(x)$ – лінійно незалежні та $y_3(x)$, $y_2(x)$ – також лінійно незалежні.

Означення. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – неперервні та диференційовані разом із своїми похідними по змінній x , то визначник вигляду

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

назвемо визначником Вронського або вронскіаном та позначатимемо його $W(y_1(x), y_2(x))$ або $W(x)$.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – диференційовані і лінійно залежні на проміжку (a,b) , то їх вронскіан дорівнює нулю.

Теорема 3. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння (1) на проміжку (a,b) , то їх вронскіан в жодній точці даного проміжку не дорівнює нулю.

З теорем 2 та 3 випливає критерій лінійної незалежності розв'язків диференціального рівняння: для того щоб розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ рівняння (1) були лінійно незалежними на заданому проміжку, необхідно і досить, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Дамо відповідь на поставлене питання: коли функція (3) буде загальним розв'язком рівняння (1).

Теорема 4. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – лінійно незалежні на проміжку (a,b) розв'язки рівняння (1), то функція (3) є загальним розв'язком рівняння (1).

Відомо, що із загального розв'язку можна знайти частинний, при виконанні початкових умов:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad (5)$$

де $x_0 \in (a, b)$.

Підставимо (3) у (5) та одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}.$$

Так як вронскіан функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ згідно теореми 3 не дорівнює нулю, система має єдиний розв'язок $C_1 = C_1^*$, $C_2 = C_2^*$. Отже, $y(x) = C_1^* y_1(x) + C_2^* y_2(x)$ – це частинний розв'язок рівняння (1), що знайдено із загального розв'язку (3) з використанням початкових умов (5).

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (1).

Нехай $y_1 = y_1(x)$ – ненульовий розв'язок рівняння (1). Цей розв'язок можна знайти шляхом підбору у вигляді $y = e^{ax}$, або $y = ax + b$, або $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c – невідомі сталі, які знаходимо після підстановки цих функцій у рівняння (1).

Розв'язок рівняння (1) – функцію $y_2(x)$ знаходимо з формули Остроградського – Ліувілля

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{B(x)}, \quad B(x) = -\int a_1(x) dx.$$

Звідси $y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(\int \frac{e^{B(x)}}{y_1^2(x)} dx \right)$. Тоді з теореми 4 загальний розв'язок рівняння (1)

записується у вигляді (3), де $y_1(x)$ та $y_2(x)$ знайдено вище. Зауважимо, що в рівнянні (1) біля найвищої похідної повинна стояти одиниця.

? Контрольні запитання

1. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку?
3. Що називають частинним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку?
4. Які умови називаються початковими умовами для диференціального рівняння n -го порядку?
5. Сформулюйте теорему Коші для диференціального рівняння n -го порядку.
6. Опишіть алгоритм розв'язування диференціального рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
7. Опишіть алгоритм розв'язування диференціального рівняння вигляду $F(x, y^{(n)}) = 0$.

8. Опишіть алгоритм розв'язування диференціального рівняння вигляду $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$.
9. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку?
10. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку?
11. Що називають визначником Вронського для системи двох функцій?
12. Як за допомогою визначника Вронського перевірити, чи є лінійно залежними функції?