

Диференціальні рівняння вищих порядків.

План

1. Види диференціальних рівнянь вищих порядків та знаходження їх розв'язків.
2. Диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М., Костробій П.П., Кісілевич В.В., Ключник І.Ф., Колісник В.М., Кучмінська Л.Й., Нитребич З.М., Олексів І.Я., Стасюк М.Ф., Бобик І.О., Ватаманюк О.З., Качурін Б.Г. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – Л.: Видавництво Національного ун-ту “Львівська політехніка”, 2001.
4. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Вища школа, 1994.
5. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Види диференціальних рівнянь вищих порядків та знаходження їх розв'язків.

Приклад 1. $(1+x^2)y''=1.$

$$\bullet \quad y'' = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \int \frac{1}{1+x^2} = \arctg x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \arctg x dx + C_1 x + C_2,$$

$$\int \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \\ dv = dx \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2|.$$

Тоді

$$y = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C_1 x + C_2. \bullet$$

Приклад 2. $y'' = 2y^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

$$\bullet \quad 2y'y''dx = 2y^3 2dy \Rightarrow d(y'^2) = 4y^3 dy \Rightarrow y'^2 = y^4 + C_1.$$

З початкових умов маємо: $1=1+C_1 \Rightarrow C_1=0$. Тоді

$$y' = \pm y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \pm dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \pm x + C_2.$$

З початкових умов маємо: $-\frac{1}{1} = \pm 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -1$. Тоді

$$y = \frac{1}{1 \pm x}.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0.$$

• Покладемо $y^{(4)} = p(x)$. Тоді $y^{(5)} = p'(x)$

$$p' - \frac{1}{x} p = 0, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow p = C_1 x, \quad y^{(4)} = C_1 x, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2, \Rightarrow y'' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \Rightarrow y = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5,$$

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами другого порядку.

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

де p і q – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Квадратне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (2)$$

називається відповідним *характеристичним рівнянням*.

Загальний розв'язок рівняння (1) залежить від значень коренів характеристичного рівняння.

Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння (2) дійсні та різні,

тобто, $k_1 \neq k_2$

то загальний розв'язок диференціального рівняння (31) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x).$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені

($D = p^2 - 4q < 0$), тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$ (уявна одиниця), $\alpha = -\frac{p}{2}$,

$\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Розв'язати диференціальні рівняння.

Приклад: Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + 3y' + 2 = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $\kappa^2 + 3\kappa + 2 = 0$.

Звідки маємо: $\kappa_1 = -2$, $\kappa_2 = -1$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

Приклад: Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$.

Звідки маємо: $\kappa_1 = \kappa_2 = 3$.

Загальний розв'язок: $y = e^{3x} (C_1 + x C_2)$.

Приклад: Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + y' + 2 = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $\kappa^2 + \kappa + 2 = 0$.

Звідки маємо: $\kappa_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$, $\kappa_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. Отже $\alpha = \frac{-1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Загальний розв'язок: $y = e^{\frac{-1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x)$.

Завдання на самопідготовку

1. Розв'язати диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку.

а) $y'' = x^2 + \frac{1}{\cos^2 x}$;

д) $y''' = \sqrt{x} + x$;

б) $y'' = \frac{1}{3}x - \cos 2x$;

е) $y''' = \sin 2x + x^2$;

в) $x - (y'')^3 + 3y'' = 0$;

є) $x + 2(y'')^3 - y'' = 0$;

г) $2x + 4(y'')^4 - 2(y'')^2 = 0$;

ж) $x - (y'' + 4)^3 + 3y'' = 0$.

2. Розв'язати лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

а) $y'' + y' - 2y = 0$;

д) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

б) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

е) $y'' + 2y' + 10y = 0$;

в) $y'' - 2y' = 0$;

є) $y'' - 2y' + y = 0$;

г) $y'' + 4y' + 13y = 0$;

ж) $25y'' - 10y' + y = 0$.