

Лекція 21

План

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.
2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М., Костробій П.П., Кісілевич В.В., Клюйник І.Ф., Колісник В.М., Кучмінська Л.Й., Нитребич З.М., Олексів І.Я., Стасюк М.Ф., Бобик І.О., Ватаманюк О.З., Качурін Б.Г. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – Л.: Видавництво Національного ун-ту “Львівська політехніка”, 2001.
4. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Вища школа, 1994.
5. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Нехай в рівнянні $a_1(x)$, $a_2(x)$ – не функції, а сталі числа. Позначимо $a_1(x) = p$, $a_2(x) = q$, де $p, q \in \mathbb{R}$. Тоді рівняння набере вигляду

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1)$$

Рівняння (1) називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами*. Ейлер запропонував шукати розв’язки рівняння (1) у вигляді:

$$y = e^{kx} \quad (2)$$

де k – дійсне або комплексне число. Знайдемо значення похідних y' , y'' та підставимо їх разом із (2) у рівняння(1), звідки матимемо:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так як $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) називається *характеристичним*. Якщо k – корінь характеристичного рівняння(3), то (2) – розв’язок рівняння(1). В результаті розв’язування квадратного рівняння (3) матимемо наступні випадки:

I) Нехай дискримінант рівняння (3) додатний, тоді матимемо два корені k_1, k_2 , які є різні та дійсні, тобто $k_1 \neq k_2$. Тоді, загальний розв’язок (1) матиме вигляд

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (4)$$

Теорема 4 говорить, що функція (4) є загальним розв’язком рівняння(1), якщо функції $y_1(x) = e^{k_1 x}$ та $y_2(x) = e^{k_2 x}$ – лінійно незалежні на деякому проміжку (a, b) . Але так як відношення $\frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$, тому (4) є загальним розв’язком рівняння(1).

II) Нехай дискримінант рівняння (3) від’ємний, тоді матимемо два корені k_1, k_2 , які є комплексно - спряжені, тобто $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. Тоді частинні розв’язки рівняння (1) матимуть вигляд

$$y_1(x) = e^{(\alpha + \beta i)x} \text{ та } y_2(x) = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Враховуючи формулу Ейлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$ та теорему, загальний розв’язок матиме вигляд

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5)$$

III) Нехай дискримінант рівняння (3) дорівнює нулю, тоді матимемо два корені k_1, k_2 , які є однакові, тобто $k_1 = k_2 = k$. Частинні розв’язки у цьому випадку матимуть вигляд

$$y_1(x) = e^{kx} \text{ та } y_2(x) = x e^{kx}.$$

Ці розв’язки є лінійно незалежні, тому згідно з теоремою 4 загальний розв’язок рівняння матиме вигляд

$$y(x) = e^{kx} (C_1 + x C_2). \quad (6)$$

Приклад: Знайти загальний розв’язок рівняння: $y'' + 3y' + 2 = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $\kappa^2 + 3\kappa + 2 = 0$.

Звідки маємо: $\kappa_1 = -2$, $\kappa_2 = -1$.

Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.

Приклад: Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$.

Звідки маємо: $\kappa_1 = \kappa_2 = 3$.

Загальний розв'язок: $y = e^{3x} (C_1 + x C_2)$.

Приклад: Знайти загальний розв'язок рівняння: $y'' + y' + 2 = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $\kappa^2 + \kappa + 2 = 0$.

Звідки маємо: $\kappa_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$, $\kappa_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$. Отже $\alpha = \frac{-1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Загальний розв'язок: $y = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x)$.

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, тобто рівняння вигляду:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на (a, b) .

Означення. Рівняння виду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (2)$$

в якому ліва частина збігається із лівою частиною рівняння (1), називається відповідним *однорідним рівнянням*.

Встановимо структуру загального розв'язку рівняння (1).

Теорема 1. Загальним розв'язком (1) є сума його довільного частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2).

Нехай $y_*(x)$ – частинний розв'язок рівняння (1), $y^0(x)$ – загальний розв'язок рівняння (2). Тому згідно теореми 1 маємо

$$y(x) = y^0(x) + y_*(x). \quad (3)$$

Але згідно структури загального розв'язку однорідного рівняння (2) маємо

$$y^0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де y_1 , y_2 – розв'язки рівняння (2), C_1 , C_2 – довільні сталі.

Тому (3) можна переписати

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_*(x). \quad (4)$$

Щоб переконатися, що (4) є загальним розв'язком (1), достатньо функцію y із формули (4) підставити у рівняння (1), знайшовши наперед першу та другу похідні.

Відомо, що із загального розв'язку (4) одержуємо частинний розв'язок (1), якщо виконуються деякі *початкові умови*:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad (5)$$

де точка $x_0 \in (a, b)$.

Вкажемо шлях знаходження частинного розв'язку (1). Підставимо (3) чи (4) у (5), попередньо продиференціювавши (3) чи (4):

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_*(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + y_*'(x_0) \end{cases} \quad (6)$$

Розглянувши систему (6) детальніше, видно, що її вронскіаном є вронскіан відносно функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ при $x = x_0$. Так як функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є лінійно незалежні (теорема про структуру загального розв'язку однорідного рівняння), тому вронскіан не дорівнює нулю. Тому система (6) має єдиний розв'язок $C_1 = C_1^*$, $C_2 = C_2^*$. Отже, $y(x) = C_1^* y_1(x) + C_2^* y_2(x) + y_*(x)$ – це частинний розв'язок (1), що знайдено із загального розв'язку (4) з використанням початкових умов (5).

Підведемо підсумок, щоб знайти загальний розв'язок (4) (а з нього частинний при використанні (5)), треба насамперед знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2) та довільний частинний розв'язок (1). Як знаходити загальний розв'язок однорідного рівняння (2) говорилося вище. Щодо відшукування частинного розв'язку $y_*(x)$ (рівняння (4)) – питання складніше. Наведемо методи, згідно яких можна його спростити.

Частинний розв'язок $y_*(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (1) шукатимемо за допомогою **методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа)**. Згідно цього методу, частинний розв'язок $y_*(x)$ шукатимемо із загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (2), але замість сталих C_1 , C_2 писатимемо невідомі функції від незалежної змінної x , тобто

$$y_*(x) = \varphi_1(x) \cdot y_1(x) + \varphi_2(x) \cdot y_2(x) \quad (7)$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки рівняння (2). Продиференціюємо (7) та знайдемо

$$y_*'(x) = \varphi_1'(x) \cdot y_1(x) + \varphi_1(x) \cdot y_1'(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2(x) + \varphi_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Накладемо на $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ умову, щоб

$$\varphi_1'(x) \cdot y_1(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2(x) = 0. \quad (8)$$

З урахуванням умови (8) похідна $y_*'(x)$ набере вигляду

$$y_*'(x) = \varphi_1(x) \cdot y_1'(x) + \varphi_2(x) \cdot y_2'(x).$$

$$\text{Далі знайдемо } y_*''(x) = \varphi_1'(x) \cdot y_1'(x) + \varphi_1(x) \cdot y_1''(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2'(x) + \varphi_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Знайдені значення $y_*'(x)$, $y_*''(x)$ та (7) підставимо в рівняння (1), дістанемо

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)[y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)] + \varphi_2(x)[y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)] + \\ + \varphi_1'(x) \cdot y_1'(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв’язки однорідного рівняння (2), то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$\varphi_1'(x) \cdot y_1'(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \quad (9)$$

Підсумуємо сказане: функція (7) є частинний розв’язок рівняння (1), для якої функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ знайдемо із системи двох рівнянь (8) та (9), тобто

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) \cdot y_1(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ \varphi_1'(x) \cdot y_1'(x) + \varphi_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Визначником цієї системи є вронскіан відносно функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, але функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є лінійно незалежні (про це говорилося вище), тому вронскіан не дорівнює нулю, а система з рівнянь (8), (9) має єдиний розв’язок $\varphi_1'(x) = g_1(x)$, $\varphi_2'(x) = g_2(x)$ де $g_1(x)$, $g_2(x)$ – деякі функції відносно змінної x (цей розв’язок системи можна знайти за допомогою методу Крамера). Функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ знайдемо після інтегрування $\varphi_1'(x) = g_1(x)$, $\varphi_2'(x) = g_2(x)$ відносно змінної x .

Нехай у рівнянні (1) функції $a_1(x)$, $a_2(x)$ – сталі. Позначимо: $a_1(x) = p$, $a_2(x) = q$, де $p, q \in R$. Тоді рівняння (1) перепишемо:

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (10)$$

Розглянемо питання знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (10). Його можна знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Але відшукування розв'язку рівняння (10) можна спростити, якщо функція $f(x)$ являє собою *спеціальну функцію*.

Розглянемо наступні випадки:

I Нехай функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\mu x} P_n(x), \quad (11)$$

де $\mu \in R$, $P_n(x)$ – многочлен степеня n , тоді можуть бути наступні варіанти:

а) число μ не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (12)$$

Тоді рівняння (10) має частинний розв'язок вигляду

$$y_*(x) = R_n(x) e^{\mu x} = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) e^{\mu x}, \quad (13)$$

де $R_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n$. Так як (13) розв'язок рівняння (10), то підставляючи (13) у рівняння (10) з правою частиною вигляду (11) та прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x у лівій та правій частинах, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів многочлена $R_n(x)$, з якої визначаємо коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_n$.

б) число μ збігається з одним із коренем характеристичного рівняння (12), тобто є простим коренем цього рівняння, тоді частинний розв'язок рівняння (10) шукатимемо у вигляді

$$y_*(x) = x R_n(x) e^{\mu x}. \quad (14)$$

в) число μ двократний корінь характеристичного рівняння (12), тоді частинний розв'язок рівняння (10) шукатимемо у вигляді

$$y_*(x) = x^2 R_n(x) e^{\mu x}. \quad (15)$$

г) число μ – корінь характеристичного рівняння (12) кратності s , частинний розв'язок рівняння (10) шукатимемо у вигляді

$$y_*(x) = x^s R_n(x) e^{\mu x}. \quad (16)$$

II Нехай функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x), \quad (17)$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлен степеня n та m відповідно, α , β – дійсні числа.

Тоді частинний розв’язок (10) шукатимемо у вигляді

$$y_*(x) = x^s e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + T_k(x) \sin \beta x), \quad (18)$$

де $R_k(x)$, $T_k(x)$ – многочлени степеня k з невизначеними коефіцієнтами, k – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$, $Q_m(x)$, тобто $k = \max\{n, m\}$, s – кратність $\alpha + \beta i$, як кореня характеристичного рівняння (12).

Зробимо ще одне зауваження, що метод підбору частинного розв’язку рівняння (10) можна застосувати до тих рівнянь, що є лінійними із сталими коефіцієнтами та спеціальною функцією $f(x)$. Для інших рівнянь користуються методом Лагранжа.

2. Нехай функція $f(x)$ матиме вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + S_m(x) \sin \beta x),$$

де $P_n(x)$, $S_m(x)$ – многочлени степеня n та m відповідно, α , β – дійсні числа.

Тоді частинний розв’язок шукатимемо у вигляді:

$$y(x) = x^r e^{\alpha x} (R_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x),$$

де $R_l(x)$, $Q_l(x)$ – многочлени степеня l з невизначеними коефіцієнтами, l – найвищий степінь

$R_l(x)$, $Q_l(x)$, r – число коренів характеристичного рівняння. Ці корені дорівнюють $\alpha + i\beta$.

Зауважимо, що многочлени $R_l(x)$, $Q_l(x)$, $R_n(x)$ мають містити всі степені змінної x від 0 до n незалежно від того чи многочлен $P_n(x)$ містить всі чи ні.

Зауважимо, що метод підбору частинного розв’язку (79) можна застосувати до тих рівнянь, що є лінійними із сталими коефіцієнтами та спеціальною функцією $f(x)$. Для інших рівнянь користуються методом Лагранжа.

Лінійні рівняння n – го порядку

Розглянемо рівняння:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = \varphi(x), \quad (91)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – відомі функції і назвемо його *лінійним рівнянням n -го порядку*, тобто це рівняння, в якому шукана функція y та всі її похідні до n -го порядку включно є в першому степені.

Врахуємо, що $a_0(x)$ не може дорівнювати нулю, бо інакше рівняння (91) не буде диференціальним рівнянням n -го порядку. Поділимо (91) на $a_0(x)$ і одержимо:

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + b_2(x)y^{(n-2)} + \dots + b_n(x)y = f(x),$$

де $b_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}$, $f(x) = \frac{\varphi(x)}{a_0(x)}$, $i = 1, \dots, n$.

Аналогічно як і для лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку, введемо поняття *однорідного та неоднорідного рівнянь*.

Якщо $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$, то (91) назвемо *однорідним*, у протилежному випадку – *неоднорідним*, тобто

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = 0 \quad (92)$$

та

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_n(x)y = f(x). \quad (93)$$

Отже (92) та (93) однорідне та неоднорідне рівняння відповідно.

Теорема 1. Якщо

$$y_1(x), \dots, y_n(x) \quad (94)$$

частинні розв’язки (92), то

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (95)$$

є також розв’язком (92).

Означення: Система функцій (94) визначених на $(a;b)$ називається *лінійно залежною*, якщо

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad (96)$$

виконується при умові, що не всі $\alpha_i = 0 (i = 1, \dots, n)$.

Означення: Система функцій (94) називається *лінійно незалежною*, якщо (96) виконується при всіх $\alpha_i = 0$.

Означення: Визначник Вронського або вронскіаном для (94) це визначник виду:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (97)$$

Теорема 2. Якщо система (94) лінійно залежна, то W дорівнює нулю. Якщо система (94) лінійно незалежна, то W не дорівнює нулю.

Означення. Фундаментальна система розв'язку – це система з n лінійно незалежних частинних розв'язків.

Теорема 3. Якщо (94) складає фундаментальну систему розв'язків (92), то (95) – є загальним розв'язком (92).

Розглянемо однорідне рівняння (92), але $b_1(x), \dots, b_n(x)$ – сталі коефіцієнти. Тоді (92) перепишемо:

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = 0, \quad (98)$$

де $b_1, \dots, b_n$ – сталі коефіцієнти

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння (98) будемо шукати як і для рівняння 2-го порядку у формі:

$$y = e^{kx}. \quad (99)$$

Рівняння вигляду

$$k^n + b_1 k^{n-1} + \dots + b_{n-1} k + b_n = 0, \quad (100)$$

де k – невідоме число (дійсне або комплексне) називається *характеристичним*. Рівняння (100), як відомо має n коренів. Позначимо їх через $k_1, k_2, \dots, k_n$. Отже, задача знаходження загального розв'язку рівняння (98) зводиться до відшукування коренів $k_1, \dots, k_n$. По аналогії з диференціальними рівняннями другого порядку загальний розв'язок шукатимемо згідно трьох випадків, використовуючи теорему 3.

Приклад:

$$y''' + y' = 0,$$

$$k^3 + k = 0,$$

$$k(k^2 + 1) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = i, \quad k_3 = -i,$$

отже $\alpha = 0, \beta = 1$.

Тоді загальний розв'язок матиме вигляд: $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Від однорідних рівнянь перейдемо до неоднорідних виду (93).

По аналогії із неоднорідними диференціальними рівняннями 2-го порядку структура загального розв'язку (93) матиме вигляд:

$$y = \underline{y}(x) + y(x),$$

де $\underline{y}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Як відшукати $\underline{y}(x)$ про це говорилося вище. Як же знайти частинний розв'язок $y(x)$ рівняння (93). Знову ж по аналогії із знаходженням частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку маємо, що його можна шукати, якщо $f(x)$ є функцією спеціального виду, а якщо ж $f(x)$ не є спеціального вигляду, то використовуємо метод варіації довільних сталих.

Приклад: Знайти загальний розв'язок: $y^{(4)} + 4y^{(2)} = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння: $k^4 + 4k^2 = 0$.

Маємо:

$$k^2(k^2 + 4) = 0.$$

Звідки:

$$k_{1,2} = 0, \quad k_{3,4} = 2i.$$

Тоді частинними розв'язками будуть функції:

$$y_1 = e^{0x}, \quad y_2 = xe^{0x}, \quad y_3 = e^{0x} \cdot \cos 2x, \quad y_4 = e^{0x} \sin 2x.$$

Отже загальний розв'язок: $y = C_1 + xC_2 + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

? Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. В чому полягає метод Ейлера відшукування розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Опишіть структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від дискримінанта характеристичного рівняння.
4. Опишіть структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.
5. Опишіть метод варіації сталих відшукування частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.
6. Як виглядає частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, якщо права частина рівняння має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{kx}$?
7. Як виглядає частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, якщо права частина рівняння має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$?
8. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійного диференціального рівняння n -го порядку?
9. Опишіть вигляд частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку в залежності від вигляду функції $f(x)$, що стоїть у правій частині рівняння.