

Лекція 21

План

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

Література

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. – Ч. 1, 2. – К.: “Техніка”, 2000.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – АСК. – К. 2001. – 647 С.
3. Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М., Костробій П.П., Кісілевич В.В., Ключник І.Ф., Колісник В.М., Кучмінська Л.Й., Нитребич З.М., Олексів І.Я., Стасюк М.Ф., Бобик І.О., Ватаманюк О.З., Качурін Б.Г. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – Л.: Видавництво Національного ун-ту “Львівська політехніка”, 2001.
4. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перестук М.О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Вища школа, 1994.
5. Кузик А.Д., Карабин О.О., Трусевич О.М. Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник. – Львів: ЛДУБЖД, 2014. – 410 с.

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' + 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2.$$

Розв’язання. Запишемо розв’язки однорідного диференціального рівняння

$$z'' + 5z' + 6z = 0, \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, z = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Знаходимо розв’язки неоднорідного диференціального рівняння

$$\alpha = 0, y_1 = Ax^2 + Bx + C, 6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2,$$

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 6B - 10A = -10 \\ 6C - 5B + 2A = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Отже,

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x^2$$

– загальний розв’язок.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' - y = 2e^x.$$

Розв’язання. $z'' - z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Так як $\alpha = 1$ – корінь кратності 1, то

$$y_1 = A x e^x, \quad A = 1,$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x$$

– загальний розв’язок.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y'' + y' - 2y = e^x (\cos x - \sin x).$$

Розв’язання. Для нашого випадку $\alpha = 1, \beta = 1$.

Маємо $z'' + z' - 2z = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, $z = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Оскільки $\alpha + \beta i = 1 + i$, то $y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x)$.

Після підстановки отримаємо

$$y_1 = e^x (2 \cos x + \sin x),$$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + e^x (2 \cos x + \sin x)$ – загальний розв’язок.

Метод варіації сталих (метод Лагранжа).

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y'' + 2y' - 3y = x$.

□ Знаходимо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

характеристичне рівняння якого має вигляд:

$$k^2 + 2k - 3 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є $k_1 = -3, k_2 = 1$. Записуємо загальний розв’язок однорідного рівняння:

$$\tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y_0(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-3x}.$$

Записуємо систему рівнянь (2.64):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{-3x} = x \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо

$$C_1'(x) = \frac{1}{4}xe^{-x}, \quad C_2'(x) = \frac{-x}{4}e^{3x}.$$

Проінтегруємо дві останні рівності за допомогою методу інтегрування частинами

та знайдемо, що $C_1(x) = \frac{1}{4}(-xe^{-x} - e^{-x})$, $C_2(x) = -\frac{1}{36}(3xe^{3x} - e^{3x})$.

Записуємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_0(x) = \frac{1}{4}(-xe^{-x} - e^{-x})e^x - \frac{1}{36}(3xe^{3x} - e^{3x})e^{-3x}.$$
 Після алгебраїчних перетворень отримуємо

$$y_0(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}.$$
 Тепер одержуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного

диференціального рівняння $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$ ■

Завдання на самопідготовку:

1. $y'' + 2y' - 3y = 12e^{-3x}$.
2. $y'' + 2y' = 4e^{-2x}$.
3. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x}$.
4. $y'' - 3y' = 9e^{3x}$.
5. $y'' + 4y' - 5y = 30e^{-5x}$.
6. $y'' - 25y = 50e^{-5x}$.
7. $y'' + 4y' = 16e^{-4x}$.
2. Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння методом варіації сталих.
 - а) $y'' - 2y' - 3y = x^2 + e^x$; г) $y'' + 3y' = 2x^3 - e^x$;
 - б) $y'' + 16y = \sin 4x + x$; д) $y'' - 5y' = x^3 - e^{5x}$;
 - в) $y'' - 3y' - 10y = e^{2x} + e^{3x}$; е) $y'' + 9y = \cos 3x + x^2$.