

Затверджую
Завідувач кафедри
прикладної математики і
механіки
ЛДУ БЖД
д-р ф.-м. наук, проф.
Роман Тацій
" ____ " _____ 20 ____ р.

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА
ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ 2 КУРСУ
З ДИСЦИПЛІНИ СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

ТЕМА: № 6. Розв'язання задач багатокритеріальної лінійної оптимізації засобами пакету Maple.

Методична розробка обговорена на засіданні кафедри
Протокол № ____ від _____ 20 ____ р.

м. Львів

ТЕМА: № 6. Розв'язання задач багатокритеріальної лінійної оптимізації засобами пакету Maple

Мета заняття

навчальна: ознайомити студентів з основними задачами багатокритеріальної лінійної оптимізації; навчити розв'язувати задачі багатокритеріальної лінійної оптимізації засобами пакету Maple.

виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.

розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

Навчальний час: 2 години.

Місце проведення: згідно з розкладом.

Забезпечення заняття: ПК, МП.

Література:

1. *Прохоров Г. В., Леденев М. А., Колбеев В. В.* Пакет символьных вычислений Maple V / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев – М: Компания Петит, 1998. – 198 с.

Структурні елементи заняття

- організаційно-вступна частина;
- вивчення нового матеріалу з одночасним виконанням прикладів на ПК;
- закріплення нового матеріалу;
- видача завдання для самостійного виконання.

Розробила:

доценти кафедри прикладної математики і механіки,
к. ф.-м. наук

Оксана Чмир

Для розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації існує кілька десятків методів та їх модифікацій. Розглянемо детальніше наступні методи:

- метод вагових коефіцієнтів;
- метод послідовних поступок;
- метод мінімізації загальної поступки.

Приклад. Автотранспортне підприємство розробляє план доставки вугілля та руди до металургійного комбінату. Для перевезення 100 т вугілля потрібно 12 автомобілів, 100 т руди – 7 автомобілів. Максимальна кількість автомобілів, які можна залучити до перевезення, становить 127. Розвантаження вугілля і руди виконується в приймальному пункті, тривалість роботи якого становить 16 год. Тривалість розвантаження 100 т вугілля становить 0,5 год., 100 т руди – 1,4 год. За будь-яких умов потрібно виконати перевезення 200 т вугілля та 400 т руди. За перевезення 100 т вугілля автотранспортне підприємство отримує дохід 12 тис. грн., 100 т руди – 7 тис. грн. Експлуатаційні витрати на перевезення 100 т вугілля становлять 7 тис. грн., 100 т руди – 5 тис. грн. Знайти такий план перевезень, при якому загальний обсяг перевезень та дохід від перевезень будуть максимальними, а експлуатаційні витрати – мінімальними.

Встановлено, що найважливішою є кількість перевезеного вантажу ($w_1 = 0,5$), а найменш важливою – собівартість перевезень ($w_3 = 0,2$). Максимальне зниження кількості перевезеного вантажу не повинно перевищувати 10%, максимальне зниження доходу – 15% за умови, що оптимізується лише одна відповідна цільова функція.

Розв'язання. Позначимо x_1 – кількість перевезеного вугілля (сотен т.), а x_2 – кількість перевезеної руди (сотен т.). Тоді задачу можна записати так:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ f_2 &= 12x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \\ f_3 &= 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ &\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 \leq 127; \\ 0,5x_1 + 1,4x_2 \leq 16; \\ x_1 \geq 2; \\ x_2 \geq 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'яжемо задачу методом вагових коефіцієнтів, методом послідовної поступки, методом мінімізації загальної поступки та порівняємо отримані результати. Обчислення виконаємо в системі **Maple**. Функцію f_3 помножимо на (-1) і зведемо задачу лише до максимізації заданих функцій мети.

МЕТОД ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

[> restart :

Задаємо функції мети, обмеження та вагові коефіцієнти

[> $f_1 := x_1 + x_2; f_2 := 12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2; f_3 := -1 \cdot (7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2);$
 $f_1 := x_1 + x_2$
 $f_2 := 12 x_1 + 7 x_2$
 $f_3 := -7 x_1 - 5 x_2$ (1)

[> $obmez := \{12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 127, 0.5 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 \leq 16, x_1 \geq 2, x_2 \geq 4\};$
 $obmez := \{2 \leq x_1, 4 \leq x_2, 12 x_1 + 7 x_2 \leq 127, 0.5 x_1 + 1.4 x_2 \leq 16\}$ (2)

[> $w_1 := 0.5; w_3 := 0.2; w_2 := 1 - w_1 - w_3; \# \text{вагові коефіцієнти}$
 $w_1 := 0.5$
 $w_3 := 0.2$
 $w_2 := 0.3$ (3)

[> with(Optimization) :
 [> $F := w_1 \cdot f_1 + w_2 \cdot f_2 + w_3 \cdot f_3; \# \text{узагальнена функція мети.}$
 $F := 2.7 x_1 + 1.6 x_2$ (4)

[> $Fmax := \text{Maximize}(F, obmez); \# \text{максимізуємо узагальнену функцію мети}$
 $Fmax := [28.8165413533835, [x_1 = 4.94736842105263186, x_2 = 9.66165413533834538]]$ (5)

[> assign(Fmax[2]); # надамо змінним x_1 та x_2 отримані значення

[> В результаті оптимізації методом вагових коефіцієнтів отримано; Максимальний обсяг перевезення = $\text{evalf}_4(f_1)$;
 Максимальний дохід = $\text{evalf}_4(f_2)$; Мінімальна собівартість = $\text{evalf}_4(-1 \cdot f_3)$; План перевезень ' x_1 ' = $\text{evalf}_4(x_1)$, ' x_2 ' = $\text{evalf}_4(x_2)$;

В результаті оптимізації методом вагових коефіцієнтів отримано

Максимальний обсяг перевезення = 14.61

Максимальний дохід = 127.0

Мінімальна собівартість = 82.94

План перевезень $x_1 = 4.947, x_2 = 9.662$ (6)

МЕТОД ПОСЛІДОВНОЇ ПОСТУПКИ

[> restart :

Задаємо функції мети, обмеження

[> $f_1 := x_1 + x_2; f_2 := 12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2; f_3 := -1 \cdot (7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2);$
 $f_1 := x_1 + x_2$
 $f_2 := 12 x_1 + 7 x_2$
 $f_3 := -7 x_1 - 5 x_2$ (7)

[> $obmez := \{12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 127, 0.5 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 \leq 16, x_1 \geq 2, x_2 \geq 4\};$
 $obmez := \{2 \leq x_1, 4 \leq x_2, 12 x_1 + 7 x_2 \leq 127, 0.5 x_1 + 1.4 x_2 \leq 16\}$ (8)

Оптимізацію починаємо з функції мети з найвищим пріоритетом (з найбільшим ваговим коефіцієнтом). Це функція $f1$

[> with(Optimization) :
 [> $f1max := \text{Maximize}(f_1, obmez);$
 $f1max := [14.6090225563910, [x_1 = 4.94736842105263098, x_2 = 9.66165413533834716]]$ (9)

Задаємо значення поступки для функції мети $f1$

[> $\delta_1 := 0.1 \cdot f1max[1];$
 $\delta_1 := 1.460902256$ (10)

Оптимізуємо наступну за пріоритетом функцію мети f_2 , використовуючи додаткове обмеження на величину максимальної поступки для функції f_1

$$\begin{aligned} &> \text{obmez} := \text{obmez} \cup \{f_1 \geq f1max[1] - \delta_1\}; \\ &\quad \text{obmez} := \{2 \leq x_1, 4 \leq x_2, 13.14812030 \leq x_1 + x_2, 12x_1 + 7x_2 \leq 127, 0.5x_1 + 1.4x_2 \leq 16\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &> f2max := \text{Maximize}(f_2, \text{obmez}); \\ &\quad f2max := [127.0000000000000, [x_1 = 6.99263158000000118, x_2 = 6.15548872000000014]] \end{aligned} \quad (12)$$

Задаємо значення поступки для функції мети f_2

$$\begin{aligned} &> \delta_2 := 0.15 \cdot f2max[1]; \\ &\quad \delta_2 := 19.05000000 \end{aligned} \quad (13)$$

Оптимізуємо наступну за пріоритетом функцію мети f_3 , використовуючи додаткове обмеження на величину максимальної поступки для функцій f_1 та f_2

$$\begin{aligned} &> \text{obmez} := \text{obmez} \cup \{f_2 \geq f2max[1] - \delta_2\}; \\ &\quad \text{obmez} := \{2 \leq x_1, 4 \leq x_2, 13.14812030 \leq x_1 + x_2, 107.9500000 \leq 12x_1 + 7x_2, 12x_1 + 7x_2 \leq 127, 0.5x_1 + 1.4x_2 \leq 16\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &> f3min := \text{Maximize}(f_3, \text{obmez}); \\ &\quad f3min := [-72.1058646600000, [x_1 = 3.18263157999999756, x_2 = 9.96548872000000330]] \end{aligned} \quad (15)$$

$$> \text{assign}(f3min[2]); \# \text{ надамо змінним } x_1 \text{ та } x_2 \text{ отримані значення}$$

$$\begin{aligned} &> \text{В результаті оптимізації методом послідовної поступки отримано: Максимальний обсяг перевезення} = \text{evalf}_4(f_1); \\ &\quad \text{Максимальний дохід} = \text{evalf}_4(f_2); \text{Мінімальна собівартість} = \text{evalf}_4(-1 \cdot f_3); \text{План перевезень } 'x_1' = \text{evalf}_4(x_1), 'x_2' \\ &\quad = \text{evalf}_4(x_2); \end{aligned}$$

В результаті оптимізації методом послідовної поступки отримано

Максимальний обсяг перевезення = 13.15

Максимальний дохід = 108.0

Мінімальна собівартість = 72.10

План перевезень $x_1 = 3.183, x_2 = 9.965$

(16)

МЕТОД МІНІМІЗАЦІЇ ЗАГАЛЬНОЇ ПОСТУПКИ

$> \text{restart} :$

Задаємо функції мети, обмеження

$$\begin{aligned} &> f_1 := x_1 + x_2; f_2 := 12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2; f_3 := -1 \cdot (7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2); \\ &\quad f_1 := x_1 + x_2 \\ &\quad f_2 := 12x_1 + 7x_2 \\ &\quad f_3 := -7x_1 - 5x_2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &> \text{obmez} := \{12 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 \leq 127, 0.5 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2 \leq 16, x_1 \geq 2, x_2 \geq 4\}; \\ &\quad \text{obmez} := \{2 \leq x_1, 4 \leq x_2, 12x_1 + 7x_2 \leq 127, 0.5x_1 + 1.4x_2 \leq 16\} \end{aligned} \quad (18)$$

Знаходимо максимальні значення кожної функції мети окремо (незалежна оптимізація)

$$\begin{aligned} &> \text{with}(\text{Optimization}) : \\ &> f1 := \text{Maximize}(f_1, \text{obmez}); f2 := \text{Maximize}(f_2, \text{obmez}); f3 := \text{Maximize}(f_3, \text{obmez}); \\ &\quad f1 := [14.6090225563910, [x_1 = 4.94736842105263098, x_2 = 9.66165413533834716]] \\ &\quad f2 := [127., [x_1 = 8.250000000000000000, x_2 = 4.]] \\ &\quad f3 := [-34., [x_1 = 2., x_2 = 4.]] \end{aligned} \quad (19)$$

Позначимо величину загальної поступки z - значення (десятковий процент), на яке ми можемо "погіршити" максимальні значення кожної функції мети, знайдені незалежно. Доповнимо початкові обмеження обмеженнями, які задають величину максимальної поступки для кожної функції.

```
> obmez1 := obmez union {f1 - f1_1 + z·f1_1 ≥ 0, f2 - f2_1 + z·f2_1 ≥ 0, z ≥ 0, f3 - f3_1 + z·f3_1·(-1) ≥ 0};
obmez1 := {0 ≤ z, 0 ≤ -7·x1 - 5·x2 + 34. + 34.·z, 0 ≤ x1 + x2 - 14.60902256 + 14.6090225563910·z, 0 ≤ 12·x1 + 7·x2 - 127. + 127.·z, 2 ≤ x1, 4 ≤ x2, 12·x1 + 7·x2 ≤ 127, 0.5·x1 + 1.4·x2 ≤ 16}
```

Знайдемо мінімальне значення загальної поступки

```
> zmin := Minimize(z, obmez1);
zmin := [0.418504468659165, [z = 0.418504468659165130, x1 = 2.87687262368625074, x2 = 5.61820871372157349]]
```

```
> assign(zmin[2]); # надамо змінним x1 та x2 отримані значення
```

```
> В результаті оптимізації методом мінімізації загальної поступки отримано; Максимальний обсяг перевезення = evalf4(f1); Максимальний дохід = evalf4(f2); Мінімальна собівартість = evalf4(-1·f3); План перевезень 'x1' = evalf4(x1), 'x2' = evalf4(x2);
```

В результаті оптимізації методом мінімізації загальної поступки отримано

Максимальний обсяг перевезення = 8.495

Максимальний дохід = 73.85

Мінімальна собівартість = 48.23

План перевезень x1 = 2.877, x2 = 5.618

(22)

Для аналізу отриманих результатів знайдемо при заданих обмеженнях максимум кожної функції мети, незалежно від значень інших функцій мети (незалежна оптимізація).

НЕЗАЛЕЖНА ОПТИМІЗАЦІЯ

```
> restart :
```

Задаємо функції мети, обмеження

```
> f1 := x1 + x2; f2 := 12·x1 + 7·x2; f3 := -1·(7·x1 + 5·x2);
f1 := x1 + x2
f2 := 12·x1 + 7·x2
f3 := -7·x1 - 5·x2
```

(23)

```
> obmez := {12·x1 + 7·x2 ≤ 127, 0.5·x1 + 1.4·x2 ≤ 16, x1 ≥ 2, x2 ≥ 4};
obmez := {2 ≤ x1, 4 ≤ x2, 12·x1 + 7·x2 ≤ 127, 0.5·x1 + 1.4·x2 ≤ 16}
```

(24)

```
> with(Optimization) :
```

```
> f1 := Maximize(f1, obmez); f2 := Maximize(f2, obmez); f3 := Maximize(f3, obmez);
f1 := [14.6090225563910, [x1 = 4.94736842105263098, x2 = 9.66165413533834716]]
f2 := [127., [x1 = 8.250000000000000000, x2 = 4.]]
f3 := [-34., [x1 = 2., x2 = 4.]]
```

(25)

```
> В результаті незалежної оптимізації отримано; Максимальний обсяг перевезення = evalf4(f1_1);
```

Максимальний дохід = evalf4(f2_1); Мінімальна собівартість = evalf4(-1·f3_1);

результаті незалежної оптимізації отримано

Максимальний обсяг перевезення = 14.61

Максимальний дохід = 127.

Мінімальна собівартість = 34.

(26)

Отже, отримані такі допустимі, оптимальні в певному сенсі, рішення.

	к-ть вугілля, $x_1, 10^2$ т	к-ть руди, $x_2, 10^2$ т	Обсяг перевез. $f_1, 10^2$ т	Дохід, f_2 , тис.грн	Собівар- тість, f_3 , тис.грн
Незалежна оптимізація функції f_1	4,95	9,66	14,61	127	82,94
Незалежна оптимізація функції f_2	8,25	4	12,25	127	77,75
Незалежна оптимізація функції f_3	2	4	6	52	34
Метод вагових коефіцієнтів	4,95	9,67	14,61	127	82,94
Метод послідовної поступки	3,18	9,97	13,15	108	72,1
Метод мінімізації загальної поступки	2,88	5,62	8,49	73,85	48,23

Оскільки ідеального рішення задача немає, то остаточний вибір серед запропонованих варіантів покладається на відповідальну особу.

Завдання для самостійного виконання.

1. Автотранспортне підприємство розробляє план доставки вугілля та руди до металургійного комбінату. Для перевезення 100 т вугілля потрібно 10 автомобілів, 100 т руди – 5 автомобілів. Максимальна кількість автомобілів, які можна залучити до перевезення, становить 120. Розвантаження вугілля і руди виконується в приймальному пункті, тривалість роботи якого становить 16 год. Тривалість розвантаження 100 т вугілля становить 0,3 год., 100 т руди – 1,2 год. За будь-яких умов потрібно виконати перевезення 300 т вугілля та 500 т руди. За перевезення 100 т вугілля автотранспортне підприємство отримує дохід 14 тис. грн., 100 т руди – 9 тис. грн. Експлуатаційні витрати на перевезення 100 т вугілля становлять 8 тис. грн., 100 т руди – 6 тис. грн. Знайти такий план перевезень, при якому загальний обсяг перевезень та дохід від перевезень будуть максимальними, а експлуатаційні витрати – мінімальними.
Встановлено, що найважливішою є кількість перевезеного вантажу ($w_1=0,5$), а найменш важливою – собівартість перевезень ($w_3=0,3$). Максимальне зниження кількості перевезеного вантажу не повинно

перевищувати 9%, максимальне зниження доходу – 14% за умови, що оптимізується лише одна відповідна цільова функція.