Львівський державний університет безпеки життєдіяльності ДСНС України

Кафедра прикладної математики і механіки

ТЕМА 6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЛЕКЦІЙНОГО ЗАНЯТТЯ
З КУРСАНТАМИ ТА СТУДЕНТАМИ __2__ КУРСУ
З ДИСЦИПЛІНИ СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Мета лекції:
Навчальна: вивчити базові поняття, методику обчислення оптимального значення задачі, принцип оптимальності Беллмана, пряму і зворотну прогонки, приклади розв'язування задач динамічного програмування: розподіл ресурсу; завантаження транспортного засобу.
Виховна: виховання свідомого ставлення до вивчення предмету, самостійності, відповідальності та організованості при підготовці до занять.
Розвиткова: розвиток логічного та абстрактного мислення, розвиток просторової уяви.

План

Література

1. *Аршинова О.І., Шевченко А.В.* Системний аналіз. Навч. посібник. – К.: НАУ, 2008. – 128 с.
2. *Роїк О.М., Шиян А.А., Нікіфорова Л.О.* Системний аналіз. Навч. посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2015. – 83 с.
3. *Кузик А.Д.* Основи системного аналізу. – Львів: ЛДУ БЖД, 2005. – 100 с.
4. *Кунда Н.Т.* Дослідження операцій у транспортних системах. – К.: Видавничий Дім "Слово", 2008. – 400 с.
5. *Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д.* Дослідження операцій. – К.: Центр учбової літератури, 2007.– 256 с.
6. *Таха Х.* Введение в исследование операций. –6-е изд.: Пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. – 912 с.

Час проведення: 2 години.
Місце проведення: лекційний зал.
Забезпечення заняття: мультимедіа.

1. Загальні поняття про задачі динамічного програмування.

Динамічне програмування – це підхід для розв’язання задач математичного програмування, який ґрунтується на принципі поетапної, тобто послідовної оптимізації. Динамічне програмування визначає оптимальний розв’язок n-вимірної задачі шляхом її декомпозиції на n етапів, кожен з яких являє собою підзадачу відносно однієї змінної. При цьому потрібно розв’язувати одновимірні оптимізаційні задачі замість великої n-вимірної.

Поділ на етапи відбувається виходячи зі змісту задачі, розв’язок якої шукаємо. Наприклад, в задачах календарного планування етапи – це дискретні відрізки часу (доба, тиждень, місяць). В інших задачах розподіл процесу на кроки є умовним. Наприклад, у випадку розподілу ресурсів між роботами кількість етапів дорівнює кількості робіт.

Типовими задачами, що розв’язуються методами динамічного програмування є:

- задача розподілу ресурсів (людських, енергетичних, сировини);
- задача про заміну обладнання;
- задачі про раціональне завантаження літака, вантажного автомобіля.

Задачі, які можна розв’язувати методами динамічного програмування повинні мати такі властивості:

- задача повинна передбачати багатокрокову структуру;
- загальна ефективність розв’язування дорівнює сумі окремих ефективностей розв’язування на кожному j-му кроці оптимізації, тобто функція мети повинна володіти властивістю адитивності
$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to extr\,;$$
- подальші пошуки оптимального розв’язку ведуться відносно стану об’єкта, якого він досяг на початку даного кроку оптимізації і не залежить від того, яким чином цей об’єкт потрапив у цей самий стан. Таку умову називають **принципом оптимальності Беллмана.**

Переваги методу динамічного програмування:

- цей метод поки що єдиний для ефективного розв’язування задач багатокрокової структури, для яких немає інших практично-припустимих методів розв’язування;
- визначення глобального екстремуму не залежить від кількості локальних екстремумів;
- метод дозволяє вводити до моделі будь-які види обмежень, причому чим більше їх буде тим скоріше знаходиться оптимальний варіант, якщо існує область допустимих розв’язків;
- обчислювальна процедура методу дозволяє проводити аналіз знайденого розв’язку по етапах, тим самим переглядаючи динаміку поведінки об’єкта;
- використання методу не залежить від характеру функції мети, вона може бути недиференційована, таблична, у вигляді графіку чи діаграми.

Недоліки методу динамічного програмування:

- метод немає універсального алгоритму, який, наприклад, є у лінійному програмуванні;
- формулювання задачі у термінах динамічного програмування досить трудомісткий етап і від того, як вибрані кроки оптимізації залежить якість розв'язування задачі, причому найбільш складний момент у процесі розв'язування задачі – складання функціонального рівняння, що передбачає принцип оптимальності.

Обчислення в динамічному програмуванні виконують рекурентно, тобто оптимальний розв'язок одного етапу використовується в якості вихідних даних наступного етапу.

Обчислення можуть проводитись від першого етапу до останнього – **метод прямої прогонки**, а можуть від останнього до першого – **метод зворотної прогонки**.

Основними елементами моделей динамічного програмування є:

1. Визначення етапів.
2. Знаходження альтернативних розв'язків на кожному етапі.
3. Визначення стану на кожному етапі.

Поняття «стану» міняється в залежності від ситуації, що моделюється. Розглянемо задачу про завантаження та задачу про заміну обладнання для демонстрації методів динамічного програмування.

2. Задача про завантаження.

Припустимо літак вантажопідйомністю W завантажують вантажем з n типів, максимізуючи сумарний прибуток, який приносить перевезення всього вантажу.

Позначимо:

w_i – вага одного предмету вантажу i-го типу,

r_i – прибуток, який приносить один завантажений предмет вантажу i-го типу,

m_i – невідома кількість предметів вантажу i-го типу, яку потрібно завантажити.

Математична модель даної задачі матиме вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i m_i \le W;$$

$$m_i \ge 0,\ m_i \in Z,\ i = \overline{1,n}.$$

Це задача цілочисельного лінійного програмування.

Три елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином:

1. Етап i відповідає предмету i-го типу ($i = \overline{1,n}$).

2. Альтернативи розв’язку на i-му етапі описуються кількістю m_i предметів i-го типу, які потрібно завантажити. Відповідний прибуток $r_i m_i$, $0 \le m_i \le \left[\frac{W}{w_i}\right]$, де $\left[\frac{W}{w_i}\right]$ – ціла частина числа $\frac{W}{w_i}$.

3. Стан $x_i = \overline{0,W}$ на i-му етапі виражає сумарну вагу предметів, рішення про завантаження яких прийнято на етапах i, i+1, … n.

Нехай $f_i(x_i)$ – максимальний сумарний прибуток від етапів i, i+1, … n при заданому стані x_i. Рекурентне рівняння методу зворотної прогонки визначається за допомогою наступної двокрокової процедури:

1. $f_i(x_i) = \max\limits_{m_i,\, x_i}\{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}$, $i = \overline{1,n}$, де $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

2. Виразимо x_{i+1} через x_i. За означенням $x_i - x_{i+1}$ – вага вантажу, який завантажено на i-му етапі, тобто

$$x_i - x_{i+1} = w_i m_i .$$

Тому $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$, $f_i(x_i) = \max\limits_{m_i,\, x_i}\{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}$, $i = \overline{1,n}$.

Приклад 6.1. У 4 - ох тонний літак завантажують предмети 3 - ох типів. Дана таблиця містить дані про вагу одного предмета w_i (в тоннах) і прибуток r_i (в тис. ум. од.), які одержуємо від одного завантаженого предмету. Як необхідно завантажити літак, щоб отримати максимальний прибуток?

Тип вантажу	Вага, w_i	Прибуток, r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Розв’язання. Оскільки вага одного предмету w_i для всіх типів предметів та максимальна вага $W = 4$ приймають цілочисельні значення, то стан x_i – сумарна вага предметів, рішення про завантаження яких прийнято на етапах i, i+1, … n, може приймати лише цілочисельні значення.

<u>Етап 3.</u> Точна вага x_3, яка може бути завантажена на етапі № 3 (завантажуємо вантаж 3-го типу) невідома, але вона може приймати одне зі значень 0, 1, 2, 3, 4 (оскільки $W = 4$ т.). Стан $x_3 = 0$ та $x_3 = 4$ являють собою випадки, коли предмет 3-го типу зовсім не завантажується або завантажуються лише предмети 3-го типу. Інші значення x_3 (1, 2 та 3) означають часткове завантаження літака предметами 3-го типу.

Оскільки $w_3 = 1$, тоді $0 \le m_3 \le \left[\frac{4}{1}\right] = 4$, то максимальна кількість одиниць цього типу, яка може бути завантажена, дорівнює 4. Тобто можливими значеннями m_3 будуть 0, 1, 2, 3, 4. Розв’язок є допустимим при умові $w_3 m_3 \le x_3$. Отже, всі недопустимі альтернативи потрібно виключити. Наступне рівняння є основою для порівняння альтернатив на 3-му етапі:

$$f_3(x_3) = \max_{m_3}\{r_3 m_3\} = \max_{m_3}\{14 m_3\}.$$

Запишемо таблицю допустимих розв'язків для кожного значення x_3.

$x_3 \backslash m_3$	$14m_3$					$f_3(x_3)$	m_3^*
	$m_3=0$	$m_3=1$	$m_3=2$	$m_3=3$	$m_3=4$		
0	0	–	–	–	–	0	0
1	0	14	–	–	–	14	1
2	0	14	28	–	–	28	2
3	0	14	28	42	–	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Комірки зі знаком " – " не задовольняють умову $m_3 \le \frac{x_3}{w_3} = x_3$.

<u>Етап 2.</u> Стан x_2 на етапі № 2 виражає сумарну вагу предметів 2-го та 3-го типів, рішення про завантаження яких прийнято на етапах 2 та 3 відповідно. Оскільки $w_2 = 3$, то максимальна кількість одиниць вантажу 2-го типу, яка може бути завантажена дорівнює 1, оскільки $0 \le m_2 \le \left[\frac{4}{3}\right] = 1.$

Можливими значеннями m_2 будуть 0, 1. Допустимі альтернативи для кожного стану x_2 визначаються нерівністю $m_2 \le \frac{x_2}{w_2} = \frac{x_2}{3}$ (комірки зі знаком "–" не задовольняють цієї умови).

$$f_2(x_2) = \max_{m_2,\, x_2}\left\{r_2 m_2 + f_3(x_3)\right\} = \max_{m_2,\, x_2}\left\{r_2 m_2 + f_3(x_2 - w_2 m_2)\right\} =$$
$$= \max_{m_2,\, x_2}\left\{47 m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\right\}.$$

$x_2 \backslash m_2$	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		$f_2(x_2)$	m_2^*
	$m_2=0$	$m_2=1$		
0	0+0	–	0	0
1	0+14	–	14	0
2	0+28	–	28	0
3	0+42	47+0	47	1
4	0+56	47+14	61	1

<u>Етап 1.</u> Стан x_1 на етапі № 1 виражає сумарну вагу предметів 1, 2-го та 3-го типів, рішення про завантаження яких прийнято на етапах 1, 2 та 3 відповідно. Так як $w_1 = 2$

та $0 \le m_1 \le \left[\frac{4}{2}\right] = 2$, то максимальна кількість одиниць вантажу 1-го типу, яка може бути завантажена дорівнює 2.

Можливими значеннями m_1 будуть 0, 1, 2. Допустимі альтернативи для кожного стану x_1 визначаються нерівністю $m_1 \le \frac{x_1}{w_1} = \frac{x_1}{2}$.

$$f_1(x_1) = \max_{m_1, x_1}\{r_1 m_1 + f_2(x_2)\} = \max_{m_1, x_1}\{r_1 m_1 + f_2(x_1 - w_1 m_1)\} =$$
$$= \max_{m_1, x_1}\{31 m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}.$$

x_1 \ m_1	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			$f_1(x_1)$	m_1^*
	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$		
0	0+0	–	–	0	0
1	0+14	–	–	14	0
2	0+28	31	–	31	1
3	0+47	31+14	–	47	0
4	0+61	31+28	62+0	62	2

Оптимальний розв'язок будується наступним чином. З умови $W = 4$ випливає, що перший етап задачі при $x_1 = 4$ дає оптимальний розв'язок $m_1^* = 2$, який означає, що два предмети першого типу будуть завантажені у літак. Це завантаження залишає $x_2 = x_1 - w_1 m_1^* = x_1 - 2m_1^* = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. Отже, на другому етапі оптимальний розв'язок при $x_2 = 0$, тобто $m_2^* = 0$. Аналогічно, $x_3 = x_2 - w_2 m_2^* = x_2 - 3m_2^* = 0 - 3 \cdot 0 = 0$, тобто на третьому етапі оптимальний розв'язок отримуємо при $x_3 = 0$, тобто $m_3^* = 0$.

Отже, оптимальний розв'язок $m_1^* = 2$, $m_2^* = 0$, $m_3^* = 0$, прибуток $F = 2 \cdot 31 = 62$.

Отримана таблиця на етапі 1 дає можливість визначити оптимальне завантаження у випадку коли $W = 3$. Новий розв'язок будується тоді починаючи з $x_1 = 3$ на першому етапі.

3. Задача про заміну обладнання.

Нехай потрібно визначити оптимальну політику заміни обладнання на наступні *n* років. На початку кожного року приймається рішення про заміну обладнання або експлуатацію його протягом наступного року.

Позначимо:

$r(t)$ – прибуток від експлуатації *t*-літнього обладнання,

$c(t)$ – витрати на обслуговування *t*-літнього обладнання протягом року,

$s(t)$ – залишкова вартість обладнання (вартість від продажу обладнання, яке експлуатувалося *t* років),

I – вартість нового обладнання, яка залишається незмінною.

Елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином:

1. Етап i відповідає порядковому номеру року ($i=\overline{1,n}$).
2. Альтернативами на i-му етапі є рішеннями про продовження експлуатації або заміну обладнання.
3. Стан на i-му етапі – це вік обладнання на початку i - го року.

Нехай $f_i(t)$ – максимальний прибуток, що отримується за роки від i до n при умові, що на початку i - го року маємо t - літнє обладнання. Рекурентне співвідношення матиме вигляд:

$$f_i(t)=\max\left\{\begin{matrix} r(t)+f_{i+1}(t+1)-c(t),\ \text{якщо експлуатуємо} \\ r(0)+s(t)+f_{i+1}(1)-c(0)-I,\ \text{якщо заміняємо} \end{matrix}\right\},$$

де $f_{n+1}(\bullet)\equiv 0$.

Приклад 6.2. Мікроавтобус експлуатується протягом 1 року. Компанія планує визначити оптимальну політику заміни мікроавтобуса протягом наступних 4 років. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну мікроавтобуса новим. Вартість нової машини вважається незмінною і складає 9500 у. о. Компанія вимагає обов'язкової заміни мікроавтобуса, що знаходиться в експлуатації протягом 3-х років. Визначити оптимальний план заміни мікроавтобуса.

Термін експлуатації t	Прибуток $r(t)$, у.о.	Витрати на обслуговування $c(t)$, у.о.	Залишкова вартість $s(t)$, у.о.
0	2500	750	
1	2200	825	6800
2	1960	910	5840
3	1770	990	5070

Розв'язання. Для визначення допустимих значень віку мікроавтобуса побудуємо граф станів (рис. 6.1).

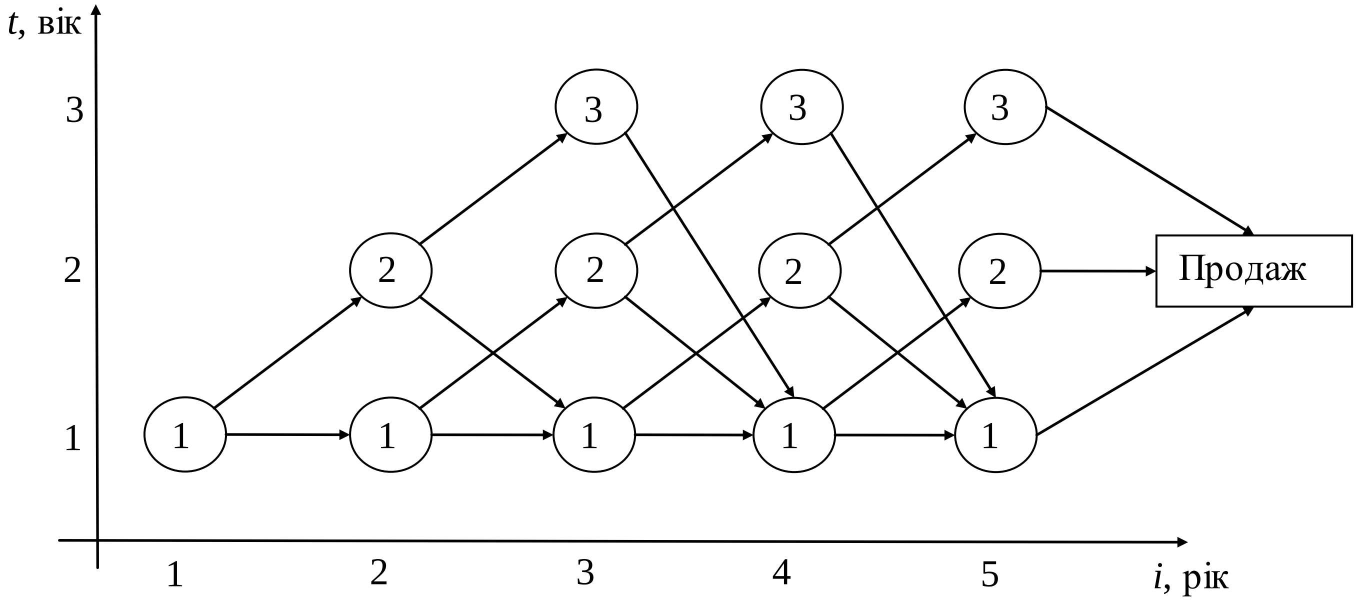


Рис. 6.1.

На початку першого року маємо мікроавтобус, який знаходиться в експлуатації один рік. Ми можемо замінити (З) його або продовжити експлуатацію (Е) на наступний рік. Якщо мікроавтобус замінили, то на початку другого року йому буде один рік, інакше його вік буде 2 роки. Такий підхід використовуємо на початку кожного року. Розв'язання задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (тобто такого, який приносить максимальний прибуток) від початку першого до кінця четвертого в мережі. При розв'язанні цієї задачі використовуємо табличну форму запису.

Етап 4.

t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	**Рішення**
1	2200+5840–825=7215	2500+6800+6800–750–9500=5850	7215	Е
2	1960+5070–910=6120	2500+5840+6800–750–9500=4890	6120	Е
3	–	2500+5070+6800–750–9500=4120	4120	З

Етап 3.

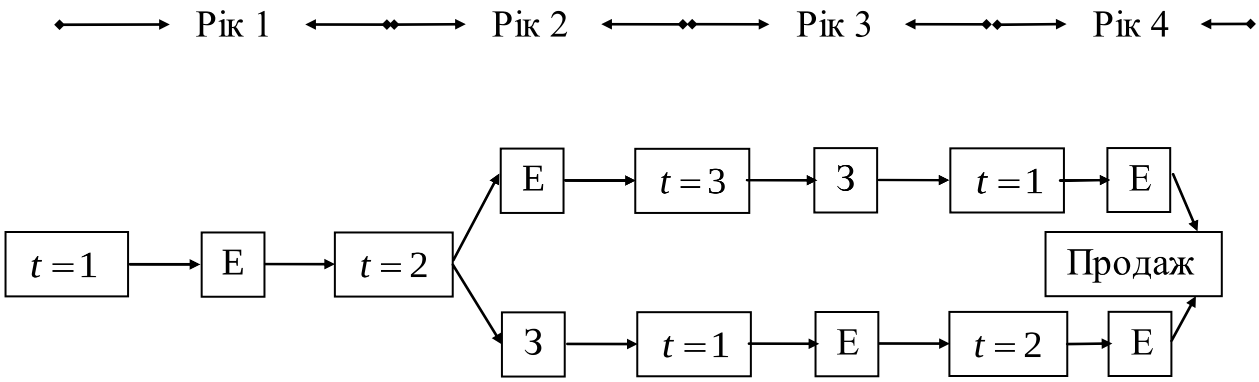
t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + f_4(t + 1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_4(1) - c(0) - I$	$f_3(t)$	**Рішення**
1	2200+6120–825=7495	2500+6800+7215–750–9500=6265	7495	Е
2	1960+4120–910=5170	2500+5840+7215–750–9500=5305	5305	З
3	–	2500+5070+7215–750–9500=4535	4535	З

Етап 2.

t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + f_3(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_3(1) - c(0) - I$	$f_2(t)$	**Рішення**
1	2200+5305–825=6680	2500+6800+7495–750–9500=6545	6680	Е
2	1960+4535–910=5585	2500+5840+7495–750–9500=5585	5585	Е або З

Етап 1.

t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + f_2(t + 1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_2(1) - c(0) - I$	$f_1(t)$	**Рішення**
1	2200+5585–825=6960	2500+6800+6680–750–9500=5730	6960	Е



Отже, починаючи з першого року експлуатації мікроавтобуса, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни мікроавтобуса будуть (Е, Е, З, Е) і (Е, З, Е, Е). Загальний прибуток складатиме 6960 у.о.

Приклад 6.3. Компанія планує визначити оптимальну політику заміни використаного на теперішній час трьохлітнього механізму протягом наступних чотирьох років, тобто аж до початку п’ятого року. Наведена таблиця містить дані, які відносяться до задачі. Компанія вимагає обов’язкової заміни механізму, що знаходиться в експлуатації шість років. Вартість нової механізму вважається незмінною і складає 100 000 у. о. На початку кожного року може бути прийнято рішення про заміну механізму новим. Визначити оптимальний план заміни механізму.

Термін експлуатації t	Прибуток $r(t)$, у.о.	Витрати на обслуговування $c(t)$, у.о.	Залишкова вартість $s(t)$, у.о.
0	20 000	200	
1	19 000	600	80 000
2	18 500	1200	60 000
3	17 200	1500	50 000
4	15 500	1700	30 000
5	14 000	1800	10 000
6	12 200	2200	5 000

Розв’язання. Для визначення допустимих значень віку механізму побудуємо граф станів (рис. 6.2).

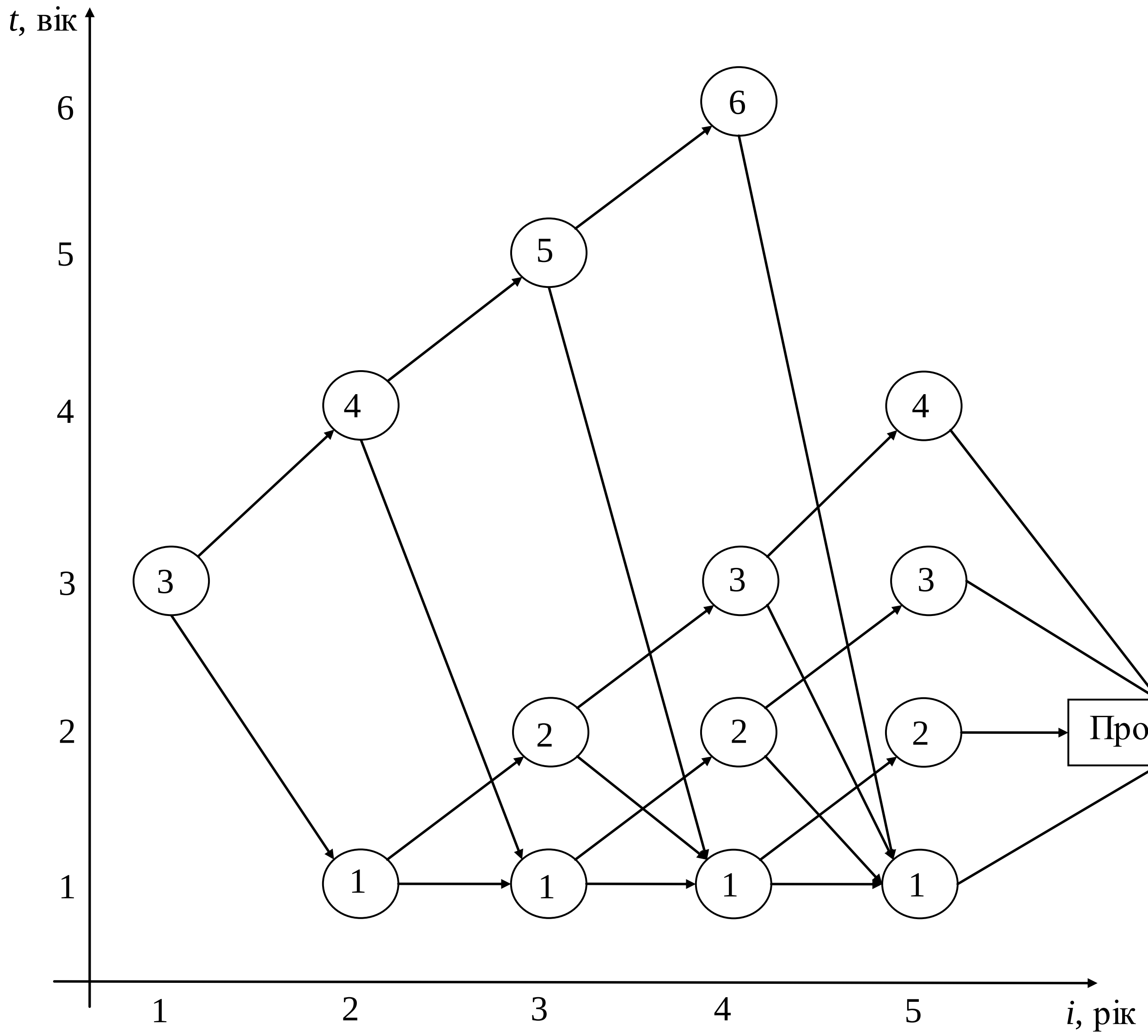


Рис. 6.2.

На початку першого року маємо механізм, який знаходиться в експлуатації три роки. Ми можемо замінити (З) його або продовжити експлуатацію (Е) на наступний рік. Якщо механізм замінили, то на початку другого року йому буде один рік, інакше його вік буде 4 роки. Такий підхід використовуємо на початку кожного року, починаючи з другого по четвертий.

Якщо однолітній механізм заміняється на початку другого або третього років, то новий механізм на початку наступного року також буде однолітнім. До того ж, на початку четвертого року шестилітній механізм обов'язково потрібно замінити, якщо він ще експлуатується. В кінці четвертого року всі механізми продаються в обов'язковому порядку. На схемі мережі також видно, що на початку другого року можливі тільки механізми із терміном експлуатації один або чотири роки. На початку третього року механізм може мати вік один, два або п'ять років, а на початку четвертого – один, два, три або шість років.

Розв'язання задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (тобто такого, який приносить максимальний прибуток) від початку першого до кінця четвертого в мережі. При розв'язанні цієї задачі використовуємо табличну форму запису. (Числові дані таблиці кратні тисячам ум. од.)

Етап 4.

T	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	**Рішення**
1	19+60–0,6=78,4	20+80+80–0,2–100=79,8	79,8	З
2	18,5+50–1,2=67,3	20+60+80–0,2–100=59,8	67,3	Е
3	17,2+30–1,5=45,7	20+50+80–0,2–100=49,8	49,8	З
6		20+5+80–0,2–100=4,8	4,8	З

Етап 3.

t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + f_4(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_4(1) - c(0) - I$	$f_3(t)$	**Рішення**
1	19+67,3–0,6=85,7	20+80+79,8–0,2–100=79,6	85,7	Е
2	18,5+49,8–1,2=67,1	20+60+79,8–0,2–100=59,6	67,1	Е
5	14+4,8–1,8=17	20+10+79,8–0,2–100=9,6	17	Е

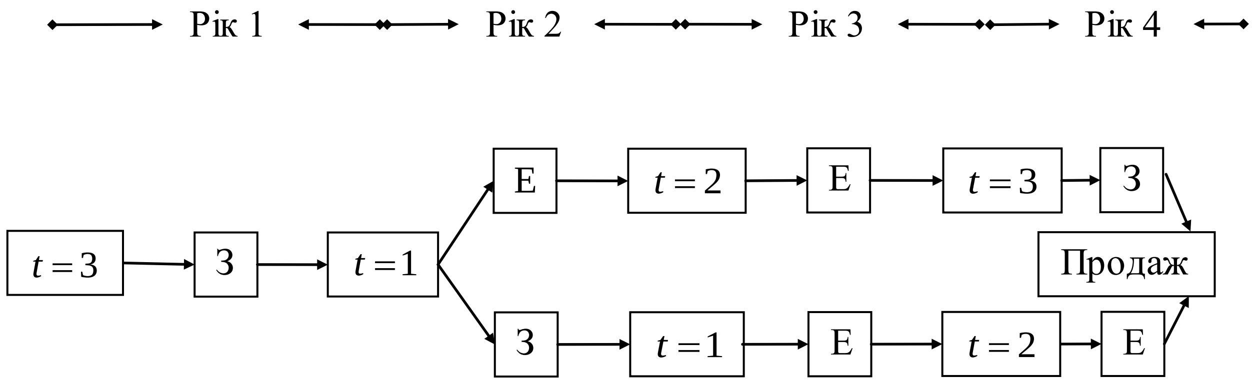
Етап 2.

t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + f_3(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_3(1) - c(0) - I$	$f_2(t)$	**Рішення**
1	19+67,1–0,6=85,5	20+80+85,7–0,2–100=85,5	85,5	Е або З
4	15,5+17–1,7=30,8	20+30+85,7–0,2–100=35,5	35,5	З

Етап 1.

t	**Експлуатація (Е)**	**Заміна (З)**	**Оптимум**	
	$r(t) + f_2(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + f_2(1) - c(0) - I$	$f_1(t)$	**Рішення**
3	17,2+35,5–1,5=51,2	20+50+85,5–0,2–100=55,3	55,3	З

Отже, на початку першого року оптимальним рішенням при $t=3$ є заміна механізму. Тоді новий механізм до початку другого року буде експлуатуватись один рік. При $t=1$ на початку другого року оптимальним рішенням буде або експлуатація, або заміна механізму. Якщо механізм заміняється, то новий до початку третього року буде знаходитись в експлуатації 1 рік. В іншому випадку, механізм буде мати вік 2 роки. Описаний процес продовжується до тих пір, поки не буде визначено оптимальне рішення для четвертого року.



Отже, починаючи з першого року експлуатації механізма, альтернативними оптимальними стратегіями відносно заміни механізма будуть (З, Е, Е, З) і (З, З, Е, Е). Загальний прибуток складатиме 55 300 у.о.

Контрольні запитання.

1. Що таке динамічне програмування?
2. Яким вимогам має задовольняти задача динамічного програмування?
3. Сформулюйте переваги та недоліки методу динамічного програмування.
4. Опишіть основні елементи моделі динамічного програмування.
5. Які типові задачі дослідження операцій розв'язуються методом динамічного програмування?
6. Як визначаються етапи в задачі про завантаження? Про заміну обладнання?
7. Сформулюйте та знайдіть розв'язок задачі п.3. як задачу про пошук найкоротшого маршруту.

Завдання на самопідготовку.

1. Віртуальний університет ЛДУ БЖД [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/
2. Системний аналіз та теорія прийняття рішень [Електронний ресурс] / Чмир Оксана Юріївна. — Режим доступу: http://virt.ldubgd.edu.ua/course/view.php?id=1765

Доцент
кафедри прикладної математики і механіки Оксана Чмир

Лекція обговорена на засіданні
кафедри прикладної математики і механіки

Протокол № від “ ” серпня 20 р.