

Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку

1. Основні поняття

Розглянемо детальніше клас лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Означення. Рівняння вигляду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку (a, b) , називається *лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку*. Якщо в правій частині рівняння (1) функція $f(x) \equiv 0$, то воно набуває вигляду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (2)$$

і називається *лінійним однорідним рівнянням другого порядку*.

Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння другого порядку (2). Функція $y=0$ є для нього розв'язком, який називається *тривіальним*. Знайдемо нетривіальні розв'язки рівняння цього рівняння.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (2), то функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.

Доведення теореми не наводимо.

Виникає питання, чи може функція (3) бути загальним розв'язком рівняння (2)?

Означення. Функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними* на проміжку (a, b) , якщо рівність

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \quad (4)$$

де α, β – дійсні числа, можлива тоді і тільки тоді, коли $\alpha = \beta = 0$. Якщо (4) виконується, але хоча б одне з чисел α або β не дорівнює нулю, то функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називаються *лінійно залежними*.

Очевидно, що функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними на проміжку (a, b) тоді і тільки тоді, коли існує таке число γ , що для всіх $x \in (a, b)$ виконується рівність

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \gamma,$$

або $y_1(x) = \gamma \cdot y_2(x)$, тобто функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є пропорційними.

Приклад 5. Нехай $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = 3x^2$, $y_3(x) = x$. З'ясувати, які з функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ та $y_3(x)$ є лінійно залежними, а які лінійно незалежними.

□ Розглянемо попарні відношення заданих функцій

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{3}, \frac{y_1(x)}{y_3(x)} = x, \frac{y_3(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{3x},$$

з яких бачимо, що функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є лінійно залежними, а функції $y_1(x)$, $y_3(x)$ та $y_3(x)$, $y_2(x)$ є лінійно незалежними ■

Означення. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є неперервними та диференційовними разом із своїми похідними відносно змінної x , то визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

називається *визначником Вронського*.

Далі наводимо без доведення декілька теорем.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно залежними, то їх визначник Вронського дорівнює нулю.

Теорема 3. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (2), то їх визначник Вронського не дорівнює нулю.

Відповідь на запитання, за яких умов функція (3) є загальним розв'язком рівняння (2), дає така теорема.

Теорема 4. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – два лінійно незалежні на інтервалі (a, b) розв'язки рівняння (2), то функція (3) є загальним розв'язком рівняння (2).

За допомогою цих теорем можна формувати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2 – го порядку із сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння (2), у якого коефіцієнти $a_1(x)$, $a_2(x)$ є не функціями, а сталими числами. Позначимо їх $a_1(x)=p$, $a_2(x)=q$, ($p, q \in R$). Тоді рівняння (2) буде мати вигляд

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами*. Л.Ейлер запропонував шукати розв'язки такого рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad (6)$$

де k – дійсне, або комплексне число. Знайдемо ті значення k , для яких (6) є розв'язком рівняння (5). Для цього знайдемо похідні y' , y'' та підставимо їх разом із функцією (6) у рівняння (5), після чого одержуємо

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то права частина останньої рівності дорівнює нулю лише за умови, що

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) називається *характеристичним рівнянням*. Як бачимо, характеристичне рівняння є квадратним рівнянням. Розв'язавши його, знайдемо значення k , при яких (6) є розв'язками лінійного однорідного рівняння (5). В процесі розв'язування квадратного рівняння (7) можуть виникнути такі три випадки.

- Якщо дискримінант рівняння (2.57) є додатним, тоді маємо два різні дійсні корені k_1, k_2 . У цьому випадку функції $y_1(x) = e^{k_1x}$, $y_2(x) = e^{k_2x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (5). Цей факт можна перевірити, обчисливши відповідний визначник Вронського. Пропонуємо здійснити це самостійно. За теоремою 4 загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 e^{k_2x}. \quad (8)$$

- Якщо дискримінант рівняння (7) є від'ємним, тоді маємо два комплексно-спряжені корені $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. У цьому випадку частинні розв'язки (5) мають вигляд

$$y_1(x) = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2(x) = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Враховуючи формулу Ейлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$ та теорему 4, отримуємо загальний розв'язок рівняння (5) у вигляді:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (9)$$

Пропонуємо самостійно перевірити, що функції $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ та $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (5).

1. Якщо дискримінант рівняння (7) дорівнює нулю, тоді маємо два однакові корені $k_1 = k_2 = k$. У цьому випадку частинні розв'язки рівняння (2.55) мають вигляд:

$$y_1(x) = e^{kx}, y_2(x) = x e^{kx}.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними (перевірте самостійно), тому згідно з теоремою 4 загальний розв'язок (5) має вигляд:

$$y = e^{kx} (C_1 + x C_2). \quad (10)$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння: $k^2 + 3k + 2 = 0$. Його коренями є числа $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. За формулою (8) запишемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}. \blacksquare$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

□ Складаємо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 9 = 0$. Його розв'язками є $k_1 = k_2 = 3$. Згідно з (10) загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = e^{3x} (C_1 + x C_2) \blacksquare$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y' + 2y = 0.$$

□ Складаємо характеристичне рівняння $k^2 + k + 2 = 0$ та розв'язуємо його. Одержуємо комплексно-спряжені корені

$$k_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}, k_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

для яких

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Згідно з (9) загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right) \blacksquare$$